Devoir 8.

Exercice 1. Planètes. (extrait Ecoles des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2007)

Nous voulons étudier le mouvement d'une planète *P*, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse M_e de centre *O*, considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse M_p est située à une distance $r = OP$ de *O*. Nous considérerons un référentiel lié à l'étoile comme un référentiel galiléen.

1. Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction des masses M_p et M_e, $r = OP$, G, la constante universelle de gravitation et le vecteur unitaire $\vec{e_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$.

2. Justifier précisément que le mouvement est plan. Préciser ce plan. On notera $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$ la base de projection dans ce plan et $\vec{e_z}$, un vecteur unitaire suivant la direction du moment cinétique en *O*, $\vec{L} = L\vec{e_z}$. Rappeler l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Préciser l'expression de L en fonction de $M_p, r, \frac{d\theta}{dt}$.

3. On suppose dans cette question que la planète décrit un **mouvement circulaire** de rayon R et de période T. On notera v_c, le module de la vitesse pour un mouvement circulaire.

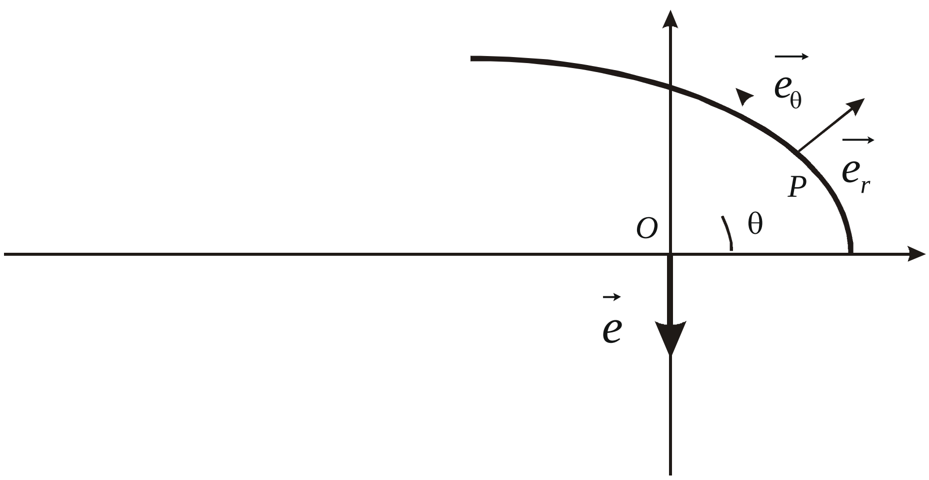
3.1. Etablir l'expression de la vitesse de la planète, v_c en fonction de R, G et M_e.

3.2. En déduire une relation entre R, T, G et M_e (3ème loi de Képler).

3.3. Exprimer alors la vitesse v_c en fonction de G, T et M_e.

3.4. En déduire l'énergie cinétique et l'énergie mécanique en fonction de G, T, M_p et M_e.

4. On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est $r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$ où p est une distance appelée paramètre et e, un coefficient positif sans dimension appelé l'excentricité compris entre 0 et 1. On se propose d'étudier le mouvement de la planète à l'aide du *vecteur excentricité*, $\vec{e} = -\frac{L}{GM_eM_p}\vec{v} + \vec{e_\theta}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la planète et $\vec{e}$ est un vecteur orthogonal au ½ grand axe de l'ellipse (voir figure ci-dessous). Aucune connaissance sur ce vecteur n'est nécessaire pour répondre aux questions suivantes.



4.1. Montrer que ce vecteur est constant au cours du temps.

4.2. En faisant le produit scalaire $\vec{e}.\vec{e_\theta}$ et en s'aidant du dessin, montrer que $r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$ et en déduire que le module de $\vec{e}$ vaut l'excentricité e de la trajectoire.
Préciser p en fonction de G, M_e, M_p et L.

4.3. Préciser la valeur de l'excentricité pour un mouvement circulaire.

4.4. Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de L en fonction de R, v_c et M_p. Retrouver à l'aide du vecteur excentricité, l'expression de la vitesse de la planète, v_c en fonction de R, G et M_e.

Exercice 2. Modèles d'atmosphère. (d'après Centrale).

L'air, considéré comme un gaz parfait, est en équilibre statique dans le champ de pesanteur terrestre g supposé constant. On désigne par Oz l'axe vertical ascendant et on étudie l'évolution de la pression P, de la température T et de la masse volumique ρ en fonction de l'altitude z du point considéré.

On pose :

$P_o = P(z=0) = 1,0.10^5$ Pa , $T_o = T(z=0) = 290$ K , $\rho_o = \rho(z=0) =$ 1,25 kg.m^{-3}, $g = 9,81$ m.s^{-2}

1. On suppose l'air en équilibre. Etablir sous forme différentielle l'équation qui régit l'équilibre de l'air sous l'action des forces de pression et des forces de pesanteur.

2. Dans le cas où l'atmosphère est en équilibre isotherme à la température T_o, déterminer la pression et la masse volumique à l'altitude z en fonction de P_o, ρ_o, z et g.

A.N. A quelle altitude h_o a-t-on $\rho = \dfrac{\rho_o}{2}$?

3. Dans le modèle de l'atmosphère adiabatique, on admet qu'il existe entre P et ρ une relation de la forme : $P = P_o\left(\dfrac{\rho}{\rho_o}\right)^{\gamma}$ où γ est une constante.

3.1 Montrer que T vérifie l'équation différentielle suivante : $\dfrac{dT}{T_o} = -\alpha dz$ où α est une constante que l'on exprimera en fonction de γ, ρ_o, g, z et P_o.
Remarque : Pour établir ce résultat il est bon d'utiliser la différentielle logarithmique : $d \ln ab = \dfrac{da}{a} + \dfrac{db}{b}$.

3.2 En déduire alors *T(z)*, *P(z)* et $\rho(z)$ en fonction de $T_o, P_o, \rho_o, \alpha, z$ et γ.

3.3 Montrer que, dans ce modèle, l'atmosphère est limitée et calculer l'altitude limite h_1 dans le cas où γ = 1,4.

3.4 Quelle valeur faudrait-il donner à γ pour que ce modèle coïncide avec celui de l'atmosphère isotherme ?

Exercice 3. Etude d'une centrifugeuse. (d'après Concours National DEUG 2000).

Le système présenté figure 1 représente une centrifugeuse de laboratoire. Il est composé d'un bâti (0), d'un rotor (1) et d'une éprouvette (2). Il sert généralement à séparer deux liquides, de masses volumiques différentes, contenus dans l'éprouvette (2).

Le rotor (1) est entraîné en rotation autour de l'axe Oz_o par un moteur électrique à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Sous l'effet centrifuge de cette rotation, l'éprouvette (2) pivote autour de Ay_1 d'un angle α, provoquant ainsi la séparation des deux liquides. Le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté dans le fond de l'éprouvette.

Le référentiel terrestre R_o est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $\left(O,\vec{u}_{xo},\vec{u}_{yo},\vec{u}_{zo}\right)$. Le référentiel R_o est associé au bâti (0).

On notera R_1 le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u}_{x1},\vec{u}_{y1},\vec{u}_{z1}\right)$ tel que $\vec{u}_{zo}=\vec{u}_{z1}$. Le repère $\left(O,\vec{u}_{x1},\vec{u}_{y1},\vec{u}_{z1}\right)$ rigidement lié au rotor (1), se déduit à chaque instant de $\left(O,\vec{u}_{xo},\vec{u}_{yo},\vec{u}_{zo}\right)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe Oz_o .

On notera R_2 le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $\left(A,\vec{u}_{x2},\vec{u}_{y2},\vec{u}_{z2}\right)$ tel que $\vec{u}_{y1}=\vec{u}_{y2}$. Le repère $\left(A,\vec{u}_{x2},\vec{u}_{y2},\vec{u}_{z2}\right)$, rigidement lié à l'éprouvette (2), se déduit à chaque instant de $\left(A,\vec{u}_{x1},\vec{u}_{y1},\vec{u}_{z1}\right)$ par une rotation d'angle α autour de l'axe Ay_1.

On définit les vecteurs suivants : $\overrightarrow{OA}=r\vec{u}_{x1}$ et $\overrightarrow{AG}=a\vec{u}_{x2}$.

Dans une première approche, on considérera que la séparation des deux liquides n'entraîne pas de modification dans la position du centre de gravité de l'éprouvette donc la distance $AG=a$ est constante au cours du temps.

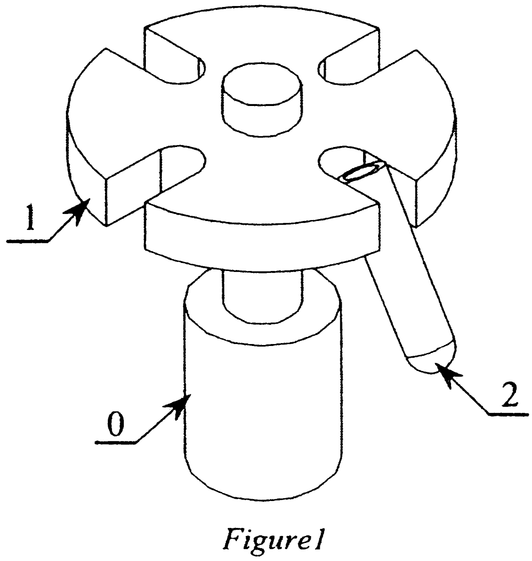


Figure 1
Architecture de la centrifugeuse

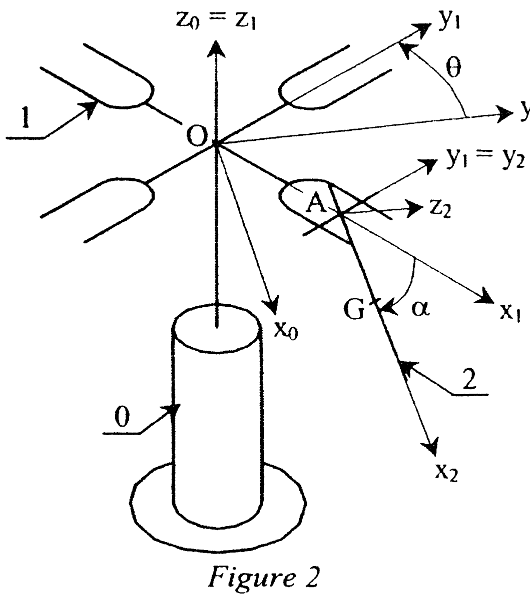
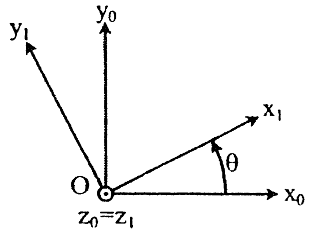
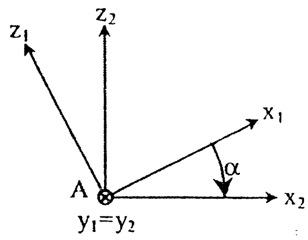


Figure 2
Paramétrage de la centrifugeuse

On donne ci-après l'orientation des différents repères les uns par rapport aux autres :





1. Exprimer dans R_1 la vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_1 / R_o)$ du référentiel R_1 par rapport à R_o .
2. Déterminer la vitesse $\vec{V}(A \in 1 / R_o)$ du point A lié au rotor (1) par rapport à R_o et exprimer la dans R_1 .
3. Que peut-on dire des vitesses $\vec{V}(A \in 1 / R_o)$ du point A lié au rotor (1) par rapport à R_o et $\vec{V}(A \in 2 / R_o)$ du point A lié à l'éprouvette (2) par rapport à R_o ? Justifier.
4. Déterminer la vitesse $\vec{V}(G \in 2 / R_o)$ du point G lié à l'éprouvette (2) par rapport à R_o et exprimer la dans R_2 .
5. Déterminer l'accélération $\vec{a}(G \in 2 / R_o)$ du point G lié à l'éprouvette (2) par rapport à R_o et exprimer la dans R_2 .