T8.3. Diffusion en présence de sources de particules.

On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de section droite d'aire S, s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ et on note $n(M, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion $D = 22 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.

D'autre part, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : pendant une durée dt, dans un élément de volume $d\tau(M)$, il apparaît $\delta Np = Kn(M, t)d\tau(M)dt$ neutrons, où $K = 3{,}5.10^4 \text{ s}^{-1}$ est une constante positive homogène à l'inverse d'un temps et caractéristique des réactions nucléaires.

On admettra en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre en $x = 0$ et $x = L$. En revanche on supposera que $n(x, t)$ ne s'annule pas à l'intérieur du cylindre.

1. Etablir l'équation aux dérivées partielles dont $n(x, t)$ est solution.
2. Déterminer $n(x)$ à une constante multiplicative près en régime stationnaire. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_S de L. Calculer L_S.
3. En régime quelconque, chercher $n(x, t)$ à une constante multiplicative près sous la forme factorisée $n(x, t) = h(x)\, g(t)$.
4. En déduire que $n(x, t)$ diverge si L est supérieur à une valeur critique L_C qu'on explicitera et qu'on calculera.