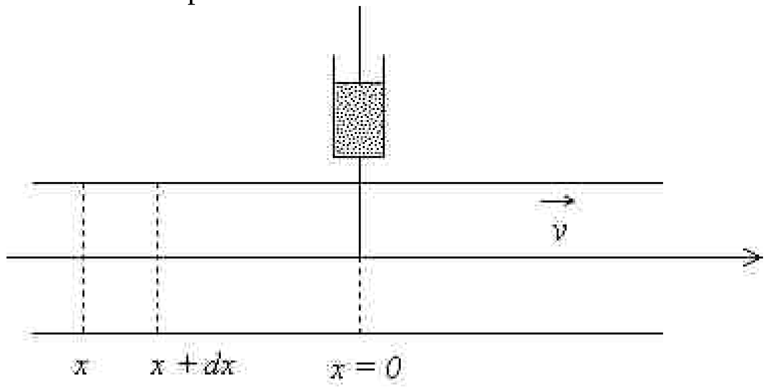
T8.1. Injection d'un soluté dans une veine.

1. Equation aux dérivées partielles.
On considère une partie de veine comprise entre les abscisses x et $x + dx$:



La densité *molaire* de courant due à la diffusion s'écrit :

$$\vec{J}_D = -D\frac{\partial c}{\partial x}\vec{u}_x$$

A cette densité molaire de courant, se superpose celle due à l'écoulement que l'on note $\vec{J}_E$.
Pendant la durée dt, le volume de soluté qui traverse la section S d'abscisse x est $Svdt$ ce qui représente une quantité de matière $cSvdt$. Comme $\vec{J}_E$ a sa norme qui s'exprime en mol.m^{-2}.s^{-1}, l'expression de ce vecteur est :

$$\vec{J}_E = cv\vec{u}_x$$

La densité molaire totale peut donc alors s'écrire :

$$\vec{J} = \left(cv - D\frac{\partial c}{\partial x}\right)\vec{u}_x$$

On effectue maintenant un bilan de matière pour la portion de veine comprise entre les abscisses x et $x + dx$.
On note dN la variation de la quantité de matière de soluté dans cette partie pendant la durée dt :

$$dN = \left(J_x(x,t) - J_x(x+dx,t)\right)Sdt$$

$$dN = -\frac{\partial J_x}{\partial x}dxSdt$$

Or :

$$\frac{dN}{dxdtS} = \frac{\partial c}{\partial t}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x}$$

En tenant compte de l'expression de $\vec{J}$, on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = -v\frac{\partial c}{\partial x} + D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}}$$

2. Cas du régime permanent.

En régime permanent la concentration est constante au cours du temps : $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$.

Comme c n'est plus une fonction du temps on a l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2c}{dx^2} - \frac{v}{D}\frac{dc}{dx} = 0$$

Par intégration on obtient ;

$$\frac{dc}{dx} - \frac{v}{D}c = A$$

$$c = K\exp\left(\frac{v}{D}x\right) - A\frac{D}{v} \quad \text{avec } x < 0$$

Comme pour $x \to -\infty$ on a $c \to 0$ et pour $x = 0$ on a $c(x=0) = c_o$ on obtient :

$$A = 0$$

$$K = c_o$$

Finalement :

$$\boxed{c = c_o \exp\left(\frac{v}{D}x\right) \quad \text{avec } x < 0}$$

3. Application numérique.

On a alors :

$$c_o = c_1 \exp\left(-\frac{v}{D}x\right)$$

avec :

$$x = -0{,}1\,\text{m}$$

$$c_o = 2{,}0.10^{-2}\ \text{mol.L}^{-1}$$