

T5.9. Cycle de Joule

Enoncé.

Une masse $m = 1$ kg d'air décrit le cycle thermodynamique suivant :

état A : $T_o = 300\text{K}$, $P_o = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;

état B : T_1 , $P_1 = kP_o$

état C : $T_2 = 1000 \text{ K}$, P_1

état D : T_3 , P_o

transformations AB et CD : adiabatiques réversibles ;

transformations BC et DA : isobares.

L'air est assimilé à un gaz parfait, de capacité calorifique à pression constante C_p et de rapport $\gamma = 1,40$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ S.I}$

1. Calculer les valeurs des températures T_1 et T_3 pour $k = 10$.

Donner l'allure du cycle en diagramme de Clapeyron (P en fonction de V).

2. Faire le bilan énergétique du cycle :

▫ quantités d'énergie thermique échangées ;

▫ travail total : est-il reçu ou fourni ?

De quel type de machine s'agit-il ?

Définir et calculer son rendement (ou efficacité).

3. Les échanges thermiques du fluide ont lieu uniquement avec deux sources :

▫ une source chaude à T_2 ;

▫ une source froide à T_o .

Le cycle étudié est-il réversible ? Expliquer pourquoi il l'est ou ne l'est pas.

Que peut-on calculer pour le vérifier numériquement ?

4. Calculer les variations d'entropie de l'air pour les différentes transformations.

Quelles relations doivent vérifier ces différentes quantités ?

5. Le cycle étant décrit dans le sens correspondant à un moteur, et les températures des sources restant inchangées, exprimer le travail total récupéré en fonction de C_p, T_o, T_2, k et γ .

Quelle valeur doit-on donner à k pour obtenir le travail maximal ?

T5.9. Cycle de Joule.**Corrigé.****1. Températures.**

Une transformation adiabatique, réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant vérifie la loi de Laplace :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = cte$$

On peut donc écrire pour les transformations AB et CD :

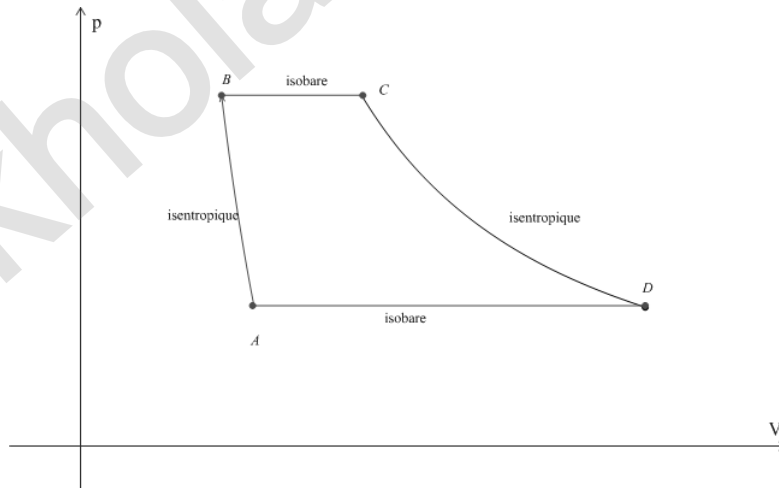
$$p_o^{1-\gamma} T_o^\gamma = p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma \rightarrow T_1 = T_o \left(\frac{p_o}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_1 = 579 \text{ K}$$

De même :

$$p_1^{1-\gamma} T_2^\gamma = p_o^{1-\gamma} T_3^\gamma \rightarrow T_3 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_3 = 518 \text{ K}$$

**2. Bilan énergétique.**

Pour les transformations adiabatiques AB et CD on a :

$$Q_{AB} = Q_{CD} = 0$$

Sur une transformation isobare on a $Q = \Delta H = C_p \Delta T$ d'où :

$$Q_{BC} = C_p (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \left(T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad Q_{BC} > 0$$

$$Q_{DA} = C_p (T_o - T_3) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \left(T_o - T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right) \quad Q_{DA} < 0$$

Le gaz décrivant un cycle, on a alors :

$$\Delta U = 0 = W + Q$$

$$W = -Q = -(Q_{BC} + Q_{DA}) = C_p (T_1 + T_3 - T_2 - T_o)$$

$$W = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} \left(T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) - T_2 \left(k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right) \quad W = -2,0.10^5 \text{ J}$$

Le cycle est parcouru dans le sens horaire. L'aire de ce cycle est positive et correspond donc à

$|W|$ car $W = - \int_{\text{cycle}} p_{\text{ext}} dV$. Le travail total est donc négatif et fourni à l'extérieur. Le cycle étudié est moteur

dont le rendement est défini par :

$$\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur couteuse}} = - \frac{W}{Q_{BC}}$$

$$\eta = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{T_3 - T_o}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_o}{T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 1 - \frac{k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(T_2 - \frac{T_o}{k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \right)}{T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\eta = 1 - \frac{k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}{T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \quad \eta = 0,48$$

3. Cycle réversible ?

Le cycle étudié n'est pas réversible car les échanges d'énergie par chaleur lors du contact avec les sources ne se font pas en suivant une transformation isotherme $T_{\text{gaz}} \neq T_{\text{extérieur}}$ aux différents stades des évolutions BC et DA .

Pour montrer cela il faut opérer un bilan entropique et montrer que la création d'entropie sur le cycle est positive.

Le second principe postule que sur un cycle :

$$\Delta S = S_e + S_c = 0$$

$$S_c = -S_e = - \int \frac{\delta Q_{BC}}{T_2} - \int \frac{\delta Q_{DA}}{T_o} = - \frac{Q_{BC}}{T_2} - \frac{Q_{DA}}{T_o}$$

$$S_c = C_p \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_o} - 2 \right) = \frac{mR\gamma}{M(\gamma-1)} \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_o} - 2 \right)$$

$$S_c = 307 \text{ J.kg}^{-1}$$

4. Variations d'entropie de l'air sur les différentes transformations.

Sur les adiabatiques réversibles (isentropiques) la variation d'entropie est nulle.

Pour les transformations isobares, on utilise l'identité thermodynamique :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$$

$$pV = nRT \rightarrow dV = \frac{nR}{p} dT \text{ pour une transformation isobare}$$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dT}{T} = C_p \frac{dT}{T}$$

On obtient ainsi :

$$\Delta S_{BC} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \Delta S_{DA} = C_p \ln \frac{T_o}{T_3}$$

Sur le cycle on a :

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + C_p \ln \frac{T_o}{T_3} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \frac{T_o}{T_3} = 0$$

$$\frac{T_2}{T_1} \frac{T_o}{T_3} = 1$$

5. Travail maximal.

D'après la question 2 :

$$W = C_p (T_1 + T_3 - T_2 - T_o)$$

$$W = C_p \left(T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + T_2 \left(k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right)$$

Le maximum sera obtenu pour $\frac{dW}{dk} = 0$.

$$\frac{dW}{dk} = C_p \left(T_o \frac{\gamma-1}{\gamma} k^{-\frac{1}{\gamma}} + T_2 \frac{1-\gamma}{\gamma} k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(T_o k^{-\frac{1}{\gamma}} - T_2 k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \right) = 0$$

$$T_o k^{-\frac{1}{\gamma}} = T_2 k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \rightarrow T_o^{\gamma} k^{-1} = T_2^{\gamma} k^{1-2\gamma}$$

$$k = \left(\frac{T_2}{T_o} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}$$