

T5.9. Cycle de Joule.

1. Températures.

Une transformation adiabatique, réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant vérifie la loi de Laplace :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = cte$$

On peut donc écrire pour les transformations AB et CD :

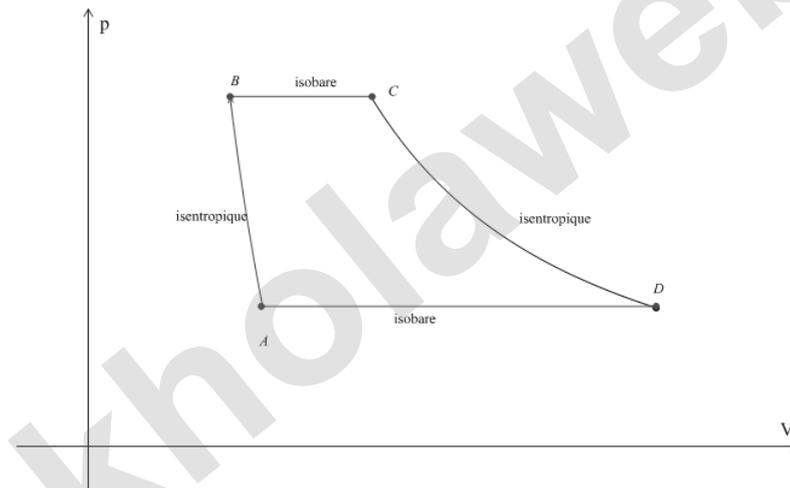
$$p_o^{1-\gamma} T_o^\gamma = p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma \rightarrow T_1 = T_o \left(\frac{p_o}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_1 = 579 \text{ K}$$

De même :

$$p_1^{1-\gamma} T_2^\gamma = p_o^{1-\gamma} T_3^\gamma \rightarrow T_3 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_3 = 518 \text{ K}$$



2. Bilan énergétique.

Pour les transformations adiabatiques AB et CD on a :

$$Q_{AB} = Q_{CD} = 0$$

Sur une transformation isobare on a $Q = \Delta H = C_p \Delta T$ d'où :

$$Q_{BC} = C_p (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} \left(T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad Q_{BC} > 0$$

$$Q_{DA} = C_p (T_o - T_3) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} \left(T_o - T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right) \quad Q_{DA} < 0$$

Le gaz décrivant un cycle, on a alors :

$$\Delta U = 0 = W + Q$$

$$W = -Q = -(Q_{BC} + Q_{DA}) = C_p (T_1 + T_3 - T_2 - T_o)$$

$$W = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} \left(T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) - T_2 \left(k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right) \quad W = -2,0.10^5 \text{ J}$$

Le cycle est parcouru dans le sens horaire. L'aire de ce cycle est positive et correspond donc à

$|W|$ car $W = - \int_{\text{cycle}} p_{\text{ext}} dV$. Le travail total est donc négatif et fourni à l'extérieur. Le cycle étudié est moteur

dont le rendement est défini par :

$$\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur couteuse}} = - \frac{W}{Q_{BC}}$$

$$\eta = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{T_3 - T_o}{T_2 - T_1}$$

$$\eta = 0,48$$

3. Cycle réversible ?

Le cycle étudié n'est pas réversible car les échanges d'énergie par chaleur lors du contact avec les sources ne se font pas en suivant une transformation isotherme $T_{\text{gaz}} \neq T_{\text{extérieur}}$ aux différents stades des évolutions BC et DA.

Pour montrer cela il faut opérer un bilan entropique et montrer que la création d'entropie sur le cycle est positive.

Le second principe postule que sur un cycle :

$$\Delta S = S_e + S_c = 0$$

$$S_c = -S_e = - \int \frac{\delta Q_{BC}}{T_2} - \int \frac{\delta Q_{DA}}{T_o} = - \frac{Q_{BC}}{T_2} - \frac{Q_{DA}}{T_o}$$

$$S_c = C_p \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_o} - 2 \right) = \frac{mR\gamma}{M(\gamma-1)} \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_o} - 2 \right)$$

$$S_c = 307 \text{ J.kg}^{-1}$$

4. Variations d'entropie de l'air sur les différentes transformations.

Sur les adiabatiques réversibles (isentropiques) la variation d'entropie est nulle.

Pour les transformations isobares, on utilise l'identité thermodynamique :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$$

$$pV = nRT \rightarrow dV = \frac{nR}{p} dT \text{ pour une transformation isobare}$$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dT}{T} = C_p \frac{dT}{T}$$

On obtient ainsi :

$$\Delta S_{BC} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \Delta S_{DA} = C_p \ln \frac{T_o}{T_3}$$

Sur le cycle on a :

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + C_p \ln \frac{T_o}{T_3} = C_p \ln \frac{T_2 T_o}{T_1 T_3} = 0$$

$$\frac{T_2 T_o}{T_1 T_3} = 1$$

5. Travail maximal.

D'après la question 2 :

$$W = C_p (T_1 + T_3 - T_2 - T_o)$$

$$W = C_p \left(T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + T_2 \left(k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right)$$

Le maximum sera obtenu pour $\frac{dW}{dk} = 0$.

$$\frac{dW}{dk} = C_p \left(T_o \frac{\gamma-1}{\gamma} k^{-\frac{1}{\gamma}} + T_2 \frac{1-\gamma}{\gamma} k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(T_o k^{-\frac{1}{\gamma}} - T_2 k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \right) = 0$$

$$T_o k^{-\frac{1}{\gamma}} = T_2 k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \rightarrow T_o^\gamma k^{-1} = T_2^\gamma k^{1-2\gamma}$$

$$k = \left(\frac{T_2}{T_o} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

www.kholaweb.com