**T5.18. Pompe à chaleur.**

Pour la résolution de cet exercice, il est conseillé de revoir la démarche utilisée lors de l'étude de la détente dite de Joule-Thomson ou en encore de Joule-Kelvin.

**1. Caractéristiques du système au niveau du compresseur et de la turbine.**

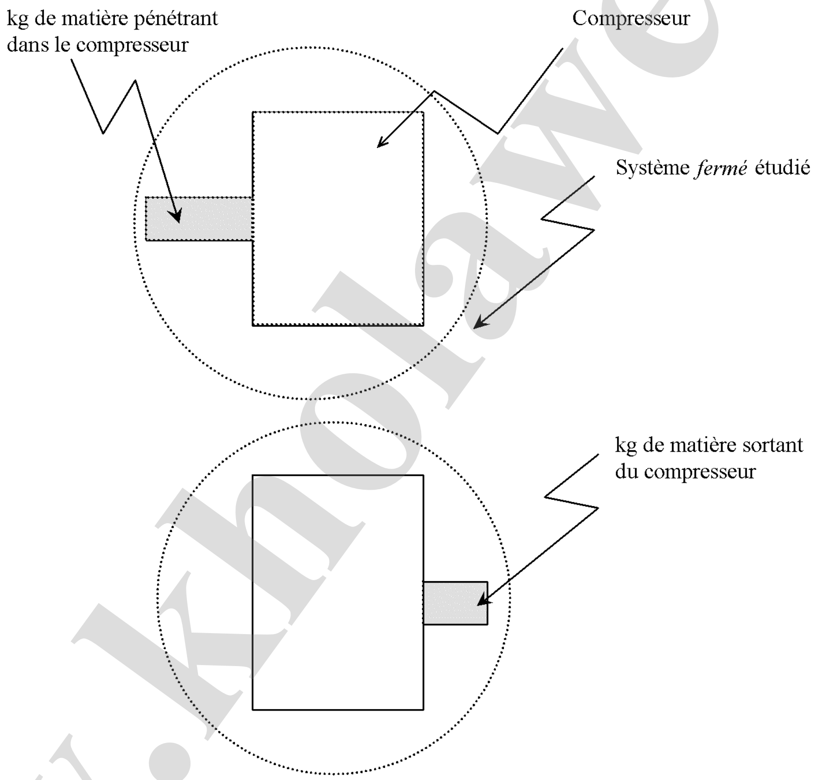
● Compresseur.

Dans le compresseur, il se produit une compression adiabatique et réversible d'un gaz parfait de coefficient « gamma » constant. On peut alors utiliser la loi de Laplace :

$$T_4^{\gamma}\, p_4^{(1-\gamma)} = T_3^{\gamma}\, p_3^{(1-\gamma)}$$

$$T_4 = T_3\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 357\ \text{K}$$

On considère le système *fermé* constitué du compresseur (Cp) et de la masse de 1 kg qui va entrer dans ce compresseur à la date *t* et ce même système fermé constitué du compresseur et de la masse de 1 kg qui en est sortie à la date *t* + *dt* :




Entre ces deux dates, la variation d'énergie interne du système s'écrit :

$$U_{fermé}(t+dt) - U_{fermé}(t) = U_{Cp}(t+dt) + U_{\text{sortant}}(t+dt) - U_{Cp}(t) - U_{\text{entrant}}(t) = W + Q_{3-4}$$

Comme la paroi est calorifugée et que le régime est stationnaire on a :

$$Q_{3-4} = 0$$

$$U_{Cp}(t+dt) = U_{Cp}(t)$$

On obtient ainsi :

$$\Delta U_{fermé} = W_{\substack{\text{forces}\\ \text{pression}}} + W_{3-4} = \int \overrightarrow{F_3}.\vec{dl}_3 + \int \overrightarrow{F_4}.\vec{dl}_4 + W_{3-4}$$

$$\Delta U_{fermé} = \int p_3 d\overrightarrow{S_3}.\vec{dl}_3 + \int p_4 \overrightarrow{S_4}.\vec{dl}_4 + W_{3-4} = p_3V_3 - p_4V_4 + W_{3-4}$$

En amont, les forces de pression sont motrices et en aval résistantes. Le volume $V_3$ est celui de la masse entrante et $V_4$ celui de la masse sortante du compresseur (Cp).

Le travail recherché s'écrit alors :

$$W_{3-4} = U_{\text{sortant}}(t+dt) + p_4V_4 - \left(U_{\text{entrant}}(t) + p_3V_3\right)$$

$$W_{3-4} = \Delta H_{3-4} = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_4 - T_3)$$

$$W_{3-4} = \frac{m}{M}R\frac{\gamma}{\gamma-1}T_3\left(\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)$$

$$W_{3-4} = 64,2 \text{ kJ}$$

● Pour ce qui se produit au niveau de la turbine (T) on procède de la même manière, on obtient ainsi :

$$\boxed{T_6 = T_5\left(\frac{P_5}{P_6}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 220 \text{ K}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{5-6} = \frac{m}{M}R\frac{\gamma}{\gamma-1}T_5\left(\left(\frac{P_5}{P_6}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right) \\ W_{5-6} = -48,2 \text{ kJ} \end{array}}$$

● Le travail $W$ effectivement reçu par l'installation est :

$$W = W_{3-4} + W_{5-6} = 16 \text{ kJ}$$

**2. Transfert thermique. Efficacité.**

On reprend le même type de raisonnement sur le local et la masse de gaz entrante et sortante et en considérant le régime permanent :

$$U_{\textit{fermé}}(t+dt) - U_{\textit{fermé}}(t) = U_{\textit{local}}(t+dt) + U_{\text{sortant}}(t+dt) - \left(U_{\textit{local}}(t) + U_{\text{entrant}}(t)\right)$$

$$U_{\textit{fermé}}(t+dt) - U_{\textit{fermé}}(t) = U_{\text{sortant}}(t+dt) - U_{\text{entrant}}(t) = Q_c + W_{2-3}$$

$$U_{\textit{fermé}}(t+dt) - U_{\textit{fermé}}(t) = Q_c + p_2V_2 - p_3V_3$$

$$Q_c = \Delta H_{2-3} = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_3 - T_2) = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_3 - T_4)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_c = \frac{m}{M}R\frac{\gamma}{\gamma-1}T_3\left(1 - \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) \\ Q_c = -64,2 \text{ kJ} \end{array}}$$

Le rendement de ce dispositif est donné par la relation suivante :

$$e = -\frac{Q_c}{W} = -\frac{\frac{m}{M} R \frac{\gamma}{\gamma - 1} T_3 \left(1 - \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}{\frac{m}{M} R \frac{\gamma}{\gamma - 1} T_3 \left(\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right) + \frac{m}{M} R \frac{\gamma}{\gamma - 1} T_5 \left(\left(\frac{P_5}{P_6}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)}$$

$$e = -\frac{T_3 \left(1 - \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}{T_3 \left(\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right) + T_5 \left(\left(\frac{P_5}{P_6}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)} = \frac{1}{1 + \frac{T_5 \left(\left(\frac{P_5}{P_6}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)}{T_3 \left(\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)}}$$

$$e = 4,0$$

Le rendement de Carnot d'une pompe à chaleur est donné par :

$$e_{Carnot} = \frac{T_{chaud}}{T_{chaud} - T_{froid}}$$

$$e_{Carnot} = 11,7$$

Le rendement de ce dispositif est inférieur au rendement de Carnot car certaines transformations quoique mécaniquement réversibles ne le sont pas de manière thermiques ; seule une transformation isotherme est à la fois mécaniquement et thermiquement réversible.