T5.15. Cycle d'un moteur Diesel.

Une mole de gaz parfait subit les transformations réversibles suivantes:
1 → 2 Compression adiabatique.
2 → 3 Dilatation à pression constante.
3 → 4 Détente adiabatique.
4 → 1 Refroidissement a volume constant.

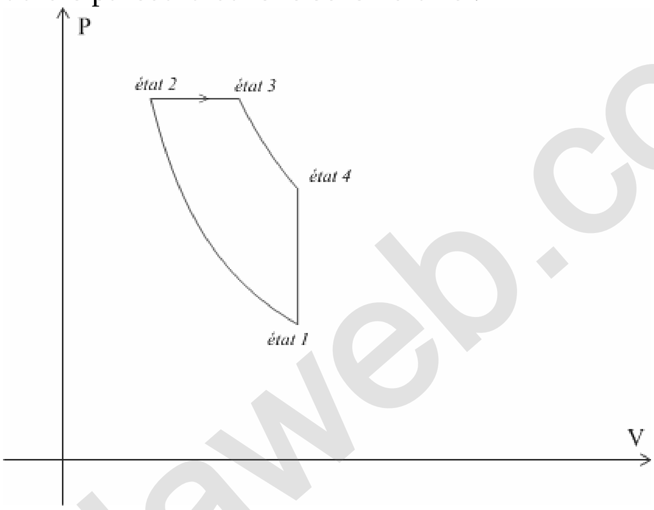
Chaque état est défini par la pression *Pi*, la température *Ti* et le volume *Vi* (*i* variant de 1 à 4).
On appelle γ le rapport des chaleurs molaires.
On définit : $a = \dfrac{V_1}{V_2}; b = \dfrac{V_4}{V_3}$.
On note *R* la constante des gaz parfaits.

1. Représenter le cycle sur un diagramme de Clapeyron.
   Donner les expressions de la pression en fonction de P_1 et de la température en fonction de T_1 pour les états 2,3 et 4 et aussi en fonction de *a, b* et γ .
2. Calculer les travaux et les chaleurs échangés pour toutes les transformations subies en fonction de *n, R,* T_1, *a, b* et γ .
   Préciser le sens des échanges.
3. Proposer une expression pour le rendement d'un moteur fonctionnant suivant ce cycle fonction des travaux et chaleur échangés.
   Donner l'expression de ce rendement en fonction de γ, *a* et *b*.

T5.15. Cycle d'un moteur Diesel.

1. Cycle et caractéristiques.

Le cycle est moteur, il est alors parcouru dans le sens horaire :



¤ La transformation 1 → 2 est une adiabatique réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant. La loi de Laplace est applicable sur cette transformation :

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma \text{ comme } V_2 = \frac{V_1}{a} \text{ on obtient :}$$

$$P_1V_1^\gamma = P_2\left(\frac{V_1}{a}\right)^\gamma$$

$$P_2 = a^\gamma P_1$$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire que :

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} = P_2\frac{V_1}{a}\frac{1}{T_2} = a^\gamma P_1\frac{V_1}{a}\frac{1}{T_2}$$

$$T_2 = a^{\gamma-1}T_1$$

¤ La transformation 2 → 3 est une détente isobare :

$$P_3 = P_2 = a^\gamma P_1$$

D'autre part : $\frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{b}$ car $\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_3}$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire que :

$$\frac{P_3V_3}{T_3} = \frac{P_2V_2}{T_2} \text{ or } P_3 = P_2 \Rightarrow \frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{a}\frac{1}{T_2} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{a}\frac{1}{T_2} = \frac{1}{b}$$

$$T_3 = \frac{a^\gamma}{b}T_1$$

¤ La transformation 3 → 4 est une adiabatique réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant. La loi de Laplace est applicable sur cette transformation :

$$P_4V_4^\gamma = P_3V_3^\gamma \text{ comme } V_4 = V_1 \text{ on obtient :}$$

$$P_4V_1^\gamma = P_3V_3^\gamma = a^\gamma P_1\left(\frac{V_1}{b}\right)^\gamma$$

$$P_4 = \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma P_1$$

L’équation d’état des gaz parfaits permet d’écrire que :

$$\frac{P_3V_3}{T_3}=\frac{P_4V_1}{T_4}\Rightarrow T_4=\frac{P_4V_1}{P_3V_3}T_3=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}P_1}{a^{\gamma}P_1}b\frac{a^{\gamma}}{b}T_1$$

$$T_4=\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}T_1$$

2. Bilans énergétiques.

¤ Pour la transformation 1 → 2 qui est une adiabatique :

$$Q_{12}=0$$

$$W_{12}=\Delta U_{12}=\frac{nR}{\gamma-1}\left(T_2-T_1\right)=\frac{nR}{\gamma-1}\left(a^{\gamma-1}-1\right)T_1$$

Comme $a>1$ et $\gamma>1$ on a $a^{\gamma-1}>1$ et donc $W_{12}>0$

¤ Pour la transformation 2 → 3 qui est une isobare à la pression P_2 :

$$Q_{23}=\Delta H_{23}=C_{p,m}\Delta T=\frac{n\gamma R}{\gamma-1}\left(T_3-T_2\right)=\frac{n\gamma R}{\gamma-1}\left(\frac{a^{\gamma}}{b}-a^{\gamma-1}\right)T_1=\frac{n\gamma R}{\gamma-1}a^{\gamma-1}\left(\frac{a}{b}-1\right)T_1$$

Comme $\frac{a}{b}=\frac{V_3}{V_2}>1$ on a $Q_{23}>0$

$$W_{23}=-P_2\left(V_3-V_2\right)=-P_2\left(\frac{V_1}{b}-\frac{V_1}{a}\right)=-a^{\gamma}P_1V_1\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)<0$$

$$W_{23}=-a^{\gamma}nR\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)T_1<0$$

¤ Pour la transformation 3 → 4 qui est une adiabatique :

$$Q_{34}=0$$

$$W_{34}=\Delta U_{34}=\frac{nR}{\gamma-1}\left(T_4-T_3\right)=\frac{nR}{\gamma-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}-\frac{a^{\gamma}}{b}\right)T_1=\frac{nR}{\gamma-1}\frac{a^{\gamma}}{b}\left(b^{1-\gamma}-1\right)T_1$$

Comme $b>1$ et $\gamma>1$ on a $b^{1-\gamma}<1$ et donc $W_{34}<0$

¤ Pour la transformation 4 →1 qui est une isochore :

$$W_{41}=0$$

$$Q_{41}=\Delta U_{41}=\frac{nR}{\gamma-1}\left(T_1-T_4\right)=\frac{nR}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}\right)T_1$$

Comme $\frac{a}{b}=\frac{V_3}{V_2}>1$ et $\gamma>1$ on a $\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}>1$ et donc $Q_{41}<0$

3. Rendement.

Pour un moteur $\eta = \dfrac{\text{grandeur valorisable}}{\text{grandeur coûteuse}} = -\dfrac{W}{Q_{23}}$

Sur un cycle $W + Q_{23} + Q_{41} = 0 \Rightarrow Q_{23} + Q_{41} = -W$ d'où :

$$\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{\dfrac{nR}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\gamma}\right)T_1}{\dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1}a^{\gamma-1}\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)T_1} = 1 + \frac{1}{\gamma}\frac{\left(1 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\gamma}\right)}{a^{\gamma-1}\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)}$$

On multiple par b^{γ} les deux membres du rapport :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(a^{\gamma} - b^{\gamma}\right)}{a^{\gamma-1}\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)b^{\gamma}}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(a^{\gamma} - b^{\gamma}\right)}{(ab)^{\gamma-1}(a - b)}$$