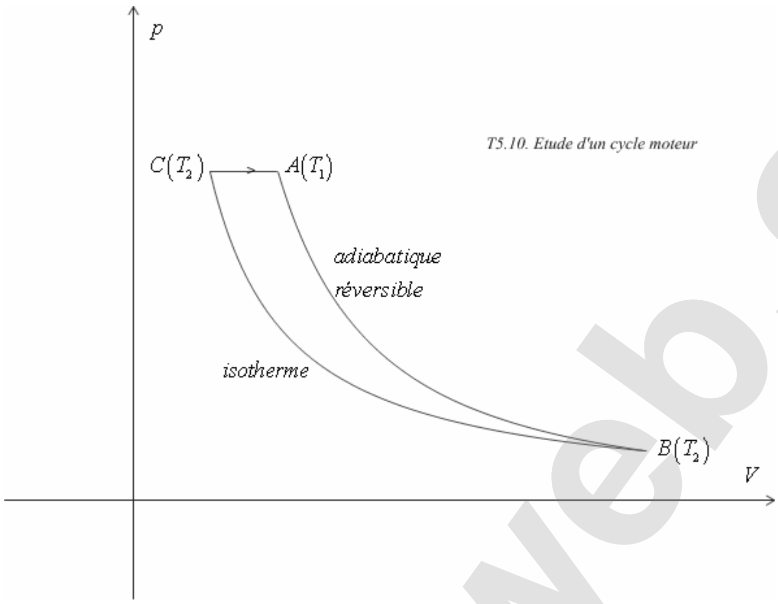
T5.10. Etude d'un cycle moteur.

1. Tracé du cycle.

La pente de l'adiabatique réversible étant « gamma » fois plus grande que celle de l'isotherme en un point donnée du diagramme (V, p) cela permet de positionner le point C à gauche du point A. On obtient ainsi :



2. Pression initiale.

La loi des gaz parfaits permet de déterminer la pression initiale P_1 :

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_1}$$

$$P_1 = \frac{1,0 \times 8,31 \times 373}{1,0.10^{-3}} = 3,1.10^6 \text{ Pa}$$

$$P_1 = 31 \text{ bar}$$

3. Température de la source froide.

La transformation AB est une adiabatique réversible d'un gaz parfait de « gamma » constant. On peut alors appliquer la loi de Laplace.

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$T_2 = 173 \text{ K}$$

4. Bilan des quantités de chaleur. Bilan entropique.

Bilan des quantités de chaleur.

● La transformation AB est adiabatique donc :

$$Q_{AB} = 0$$

● La transformation BC est une isotherme. On a alors :

$$\Delta U_{BC} = 0 = Q_{BC} + W_{BC}$$

$$Q_{BC} = -W_{BC} = +\int p_{ext} dV \underset{\substack{mécaniquement \\ réversible}}{=} \int p dV = nRT_2 \int \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$$Q_{BC} = nRT_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\ln\frac{V_3}{V_2}$$

Avec V_3 volume du gaz au point C. La loi des gaz parfaits permet d'exprimer ce volume.

$$p_1V_3 = nRT_2 \text{ et } p_1V_1 = nRT_1 \quad\Rightarrow\quad V_3 = \frac{T_2}{T_1}V_1$$

$$Q_{BC} = nRT_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2}\right) = nRT_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$Q_{BC} = nRT_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}\right)$$

$$Q_{BC} = nR\gamma T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$Q_{BC} = -4,4 \text{ kJ}$$

● La transformation CA est isobare.

$$Q_{CA} = \Delta H_{CA} = C_P\left(T_1 - T_2\right)$$

$$Q_{CA} = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}T_1\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$$

$$Q_{CA} = 6,6 \text{ kJ}$$

Bilan entropique.

La fonction S est une fonction d'état.

Sur le cycle étudié : $\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}$

● Sur l'évolution AB adiabatique et réversible :

$$\Delta S_{AB} = 0$$

● Sur l'évolution BC isotherme :

$$\Delta S_{BC} = S_e + S_i \underset{\substack{\text{mécaniquement et}\\ \text{thermiquement}\\ \text{réversible}}}{=} S_e = \int\frac{\delta Q^{réversible}}{T_{système}} \underset{isotherme}{=} -\int\frac{\delta W^{réversible}}{T_{système}}$$

$$\Delta S_{BC} = \int\frac{pdV}{T_{système}} = nR\ln\frac{V_3}{V_2} = nR\ln\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}\right)$$

$$\Delta S_{BC} = nR\gamma\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \qquad\qquad \Delta S_{BC} = -25,5 \text{ J/K}$$

● Sur l'évolution CA isobare :

$$\Delta S_{CA} = \int\frac{\delta Q^{réversible}}{T_{système}} = \int\frac{dH}{T_{système}} = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}\int\frac{dT_{système}}{T_{système}} = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_1}{T_2} = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right)$$

$$\Delta S_{CA} = -nR\gamma\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \qquad\qquad \Delta S_{CA} = +25,5 \text{ J/K}$$

On retrouve bien pour un cycle $\Delta S = 0$. L'entropie d'irréversibilité liée à la transformation CA qui est mécaniquement réversible mais non thermiquement réversible se calcule en écrivant :

$$\Delta S = 0 = S_e + S_i$$

$$S_i = -S_e = -\int_{BC} \frac{\delta Q_{BC}}{T_2} - \int_{CA} \frac{\delta Q_{CA}}{T_1}$$

$$S_i = -\left(\frac{Q_{BC}}{T_2} + \frac{Q_{CA}}{T_1}\right) = -\left(\frac{nR\gamma T_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{T_2} + \frac{nR\frac{\gamma}{\gamma-1}T_1\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)}{T_1}\right)$$

$$S_i = -nR\gamma\left(\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \frac{1}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)\right)$$

$$S_i = 7,7 \text{ J/K}$$

5. Travail et rendement.

D'après le premier principe appliqué à un cycle :

$$W = Q_{BC} - Q_{CA}$$

Le rendement de ce moteur est :

$$r = -\frac{W}{Q_{CA}} = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{CA}}$$

$$r = 1 + \frac{nR\gamma T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{nR\frac{\gamma}{\gamma-1}T_1\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)} = 1 + (\gamma-1)\frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)}$$

$$r = 0,335$$

6. Rendement de Carnot.

Le rendement maximal d'un moteur thermique ditherme est obtenu avec un moteur de Carnot dont le cycle est constitué de deux isothermes et deux adiabatiques réversibles et dont le rendement de dépend que de la température des sources.

$$r_{Carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$r_{Carnot} = 0,54$$

On a :

$r < r_{Carnot}$ car le cycle est irréversible.