T4.9. Relation entre p et V dans le cas où γ dépend de la température.

On applique l'identité thermodynamique :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$$

Comme la transformation est isentropique et que le gaz est parfait on a :

$$dS = 0$$

$$dU = \frac{nR}{\gamma - 1} dT$$

$$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

il vient :

$$0 = \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \quad (1)$$

Comme $T = \frac{PV}{nR} = \frac{u}{nR}$ on a $dT = \frac{du}{nR}$ et donc $\frac{dT}{T} = \frac{du}{u}$.

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{du}{u} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{du}{u} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

On donne $\gamma = aT + b$,et en tenant compte de l'équation d'état du gaz parfait, l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\frac{du}{u} + \left(\frac{a}{nR} u + b - 1 \right) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{du}{u\left(\frac{a}{nR} u + b - 1 \right)}$$

On opère une décomposition en fractions rationnelles :

$$\frac{dV}{V} = -\left[\frac{Adu}{u} + \frac{Bdu}{\left(\frac{a}{nR} u + b - 1 \right)} \right] = -\left[\frac{A\left(\frac{a}{nR} u + b - 1 \right) + Bu}{u\left(\frac{a}{nR} u + b - 1 \right)} \right] du$$

$$\frac{dV}{V} = -\left[\frac{A(b-1) + \left(A\frac{a}{nR} + B \right) u}{u\left(\frac{a}{nR} u + b - 1 \right)} \right] du$$

Par identification on obtient : $A(b-1) = 1$ et $\left(A\frac{a}{nR} + B \right) = 0$ d'où :

$$A = \frac{1}{b-1}$$

$$B = -A\frac{a}{nR} = -\frac{a}{nR(b-1)}$$

$$\frac{dV}{V}=-\left[\frac{du}{u(b-1)}-\frac{a}{nR(b-1)}\frac{du}{\left(\frac{a}{nR}u+b-1\right)}\right]$$

L'intégration conduit à :

$$\ln V=\ln u^{-\frac{1}{b-1}}+\ln\left(\frac{au}{nR}+b-1\right)^{\frac{1}{b-1}}+\ln K \qquad K \text{ constante d'intégration}$$

$$\ln V=\ln K\left(\frac{\frac{au}{nR}+b-1}{u}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$V=K\left(\frac{\frac{au}{nR}+b-1}{u}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

On remplace u par pV et on élève les deux membres de l'équation à la puissance *b-1* :

$$V^{b-1}=K^{b-1}\left(\frac{\frac{apV}{nR}+b-1}{pV}\right)$$

$$pV^{b}=K^{b-1}\left(\frac{apV}{nR}+b-1\right)$$

On pose $C=K^{b-1}$:

$$pV^{b}=C\left(\frac{apV}{nR}+b-1\right)$$

Dans le cas où $a=0$, on a $b=\gamma$, on obtient :

$$pV^{\gamma}=C(b-1)=Cte$$

Ce qui est l'expression de la loi de Laplace dans le cas où le coefficient γ ne dépend pas de la température.