T4.8. Optimisation d'un compresseur.

1. **Entropie créée.**

On étudie le système constitué du gaz, du piston et du corps de pompe.

La variation d'entropie de ce système s'écrit :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

L'entropie d'échange S_e s'écrit dans le cas de cette transformation monotherme :

$$S_e = \int \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{Q}{T_1}$$

Comme les états extrêmes de température du système sont les mêmes on a :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

$$Q = -W$$

$$S_e = -\frac{W}{T_1}$$

Pour déterminer la variation d'entropie, on part de l'identité thermodynamique et de l'équation d'état du gaz parfait :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = C_V\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

$$\text{or } dT = 0 \rightarrow dS = nR\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = nR\ln\frac{V_2}{V_1} = nR\ln\frac{p_1}{p_2}$$

On obtient le bilan entropique suivant :

$$\Delta S = nR\ln\frac{p_1}{p_2} = -\frac{W}{T_1} + S_c$$

$$S_c = nR\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{W}{T_1}$$

Le travail effectué lors de cette transformation est :

$$W = nRT_1\ln\frac{p_2}{p_1} + T_1S_c$$

L'entropie créée S_c ne peut être que positive ou nulle. Le travail minimal à fournir correspond à $S_c = 0$ valeur caractéristique d'une transformation réversible.

$$W_{\min} = nRT_1\ln\frac{p_2}{p_1}$$

Pour obtenir cette il faut réaliser une transformation qui assure la réversibilité des échanges thermiques avec l'extérieur à la température T_1 et une réversibilité mécanique. La transformation souhaitée est alors une *isotherme*.

On calcule le travail sur une telle transformation :

$$W = -\int p_{ext}\, dV \underset{\substack{\text{réversibilité}\\ \text{mécanique}}}{=} -\int p_{gaz}\, dV$$

or $p_{gaz} V = nRT_1$

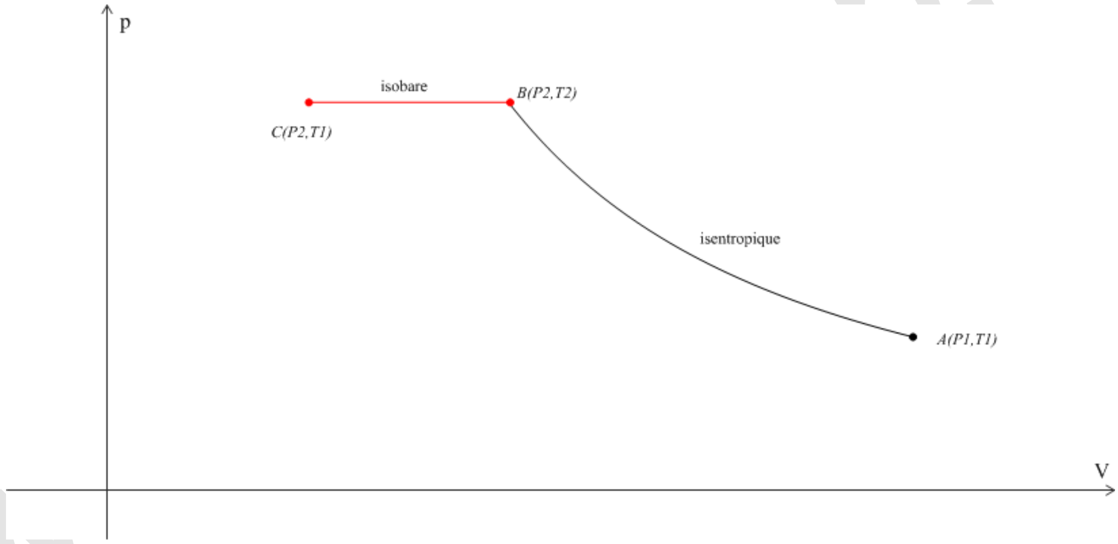
$$W = -\int nRT_1 \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = nRT_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = W_{\min}$$

2. Travail W_1. Comparaison.

Sur l'adiabatique réversible : $Q_{AB} = 0$

Sur l'isobare : $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P \left(T_1 - T_2\right)$



Sur l'ensemble de la transformation :

$\Delta U = W_1 + Q = W_1 + \Delta H_{BC} = C_V \Delta T$ or $\Delta T = 0$ d'où :

$W_1 = -\Delta H_{BC} = -C_P \left(T_1 - T_2\right)$

Pour déterminer T_2, on utilise le fait que la transformation AB soit une isentropique d'un gaz parfait de coefficient γ constant et que la loi de Laplace est alors applicable :

$$p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma} \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$W_1 = C_P T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$$

$$W_1 = nR \frac{\gamma}{\gamma - 1} T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$$

$$\frac{W_1}{W_{\min}} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}{\ln \frac{p_2}{p_1}} \qquad \frac{W_1}{W_{\min}} = 1{,}27$$

3. Pression *p*. Travail minimal W_2.

La suite des étapes de la nouvelle transformation suivie par le gaz est :

$$A\left(p_1,T_1\right)\xrightarrow[isentropique]{}B\left(p,T\right)\xrightarrow[isobare]{}C\left(p,T_1\right)\xrightarrow[isentropique]{}D\left(p_2,T'\right)\xrightarrow[isobare]{}E\left(p_2,T_1\right)$$

Pour l'ensemble de la transformation on a :

$$\Delta U = W + \Delta H_{BC} + \Delta H_{DE}$$
$$W = -C_p\left[\left(T_1 - T\right)+\left(T_1 - T'\right)\right] = C_p\left(T + T' - 2T_1\right)$$

On utilise à nouveau la loi de Laplace pour les transformations *AB* et *CD* :

$$T = T_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad , \quad T' = T_1\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On obtient ainsi l'expression du travail *W* en fonction de la pression *p* :

$$W = C_p T_1\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2\right]$$

Pour déterminer la valeur de *p* qui rend *W* minimal on cherche la valeur nulle de la dérivée de *W* par rapport à *p* (on pose $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}$) :

$$\frac{dW}{dp} = C_P T_1\left[\alpha\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{p_1}\right) - \alpha\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{p_2}{p^2}\right)\right]$$
$$\frac{dW}{dp} = C_P T\alpha\left(\frac{p^{\alpha-1}}{p_1^{\alpha}} - \frac{p_2^{\alpha}}{p^{\alpha+1}}\right)$$

Cette dérivée s'annule pour :

$$p^{\alpha-1}p^{\alpha+1} = p_1^{\alpha}p_2^{\alpha}$$
$$p = \left(p_1 p_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette valeur de *p* est bien comprise entre p_1 et p_2. On admet que cette valeur correspond à un minimum de W noté W_2 :

$$W_2 = C_P T_1\left[\left(\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\alpha} + \left(\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\alpha} - 2\right]$$
$$W_2 = 2C_P T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1\right]$$
$$W_2 = 2nR\frac{\gamma}{\gamma-1}T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right]$$

$$\frac{W_2}{W_{\min}} = 2\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right]}{\ln\frac{p_2}{p_1}}$$

$$\frac{W_2}{W_{\min}} = 1{,}12$$

Le compresseur à deux étages est plus performant quant au travail à fournir.