T3.15. Echanges de chaleur : Effet Joule et Rayonnement.

Enoncé.

Un fil conducteur, de masse *m*, de résistance *R* indépendante de la température, et de capacité thermique massique à pression constante c_p , est parcouru à partir de $t = 0$, par un courant constant *I*.

Il s'échauffe par effet Joule, mais perd par rayonnement dans l'atmosphère une puissance $P = K\left(\theta - \theta_a\right)$ où θ est la température variable du fil, θ_a celle de l'atmosphère supposée constante.

1. Etablir l'expression de $\theta\left(t\right)$. Donner l'allure du graphe de $\theta\left(t\right)$?
2. Reprendre le même problème en supposant désormais la résistance variant avec la température selon la loi : $R = R_a\left[1+\alpha\left(\theta - \theta_a\right)\right]$.

T3.15. Echanges de chaleur : Effet Joule et Rayonnement.
Corrigé.

1. Expression de l'évolution temporelle de la température.

Entre les dates *t* et *t* + *dt* la variation d'énergie interne du fil est égale à :

$$dU = \delta W + \delta Q = mc_p dt \text{ avec } \delta W = 0$$

Cette variation est due à :

l'apport d'énergie de la part du travail des forces électriques : $\delta Q_1 = RI^2 dt$

à la perte d'énergie par rayonnement : $\delta Q_2 = -Pdt = -K\left(\theta - \theta_a\right)dt$

Le bilan énergétique s'écrit alors :

$$mc_p d\theta = RI^2 dt - K\left(\theta - \theta_a\right)dt$$

$$\int_{\theta_a}^{\theta} \frac{mc_p}{RI^2 - K\left(\theta - \theta_a\right)} d\theta = \int_0^t dt$$

$$mc_p \int_{\theta_a}^{\theta} \frac{1}{RI^2 - K\left(\theta - \theta_a\right)} d\theta = \int_0^t dt$$

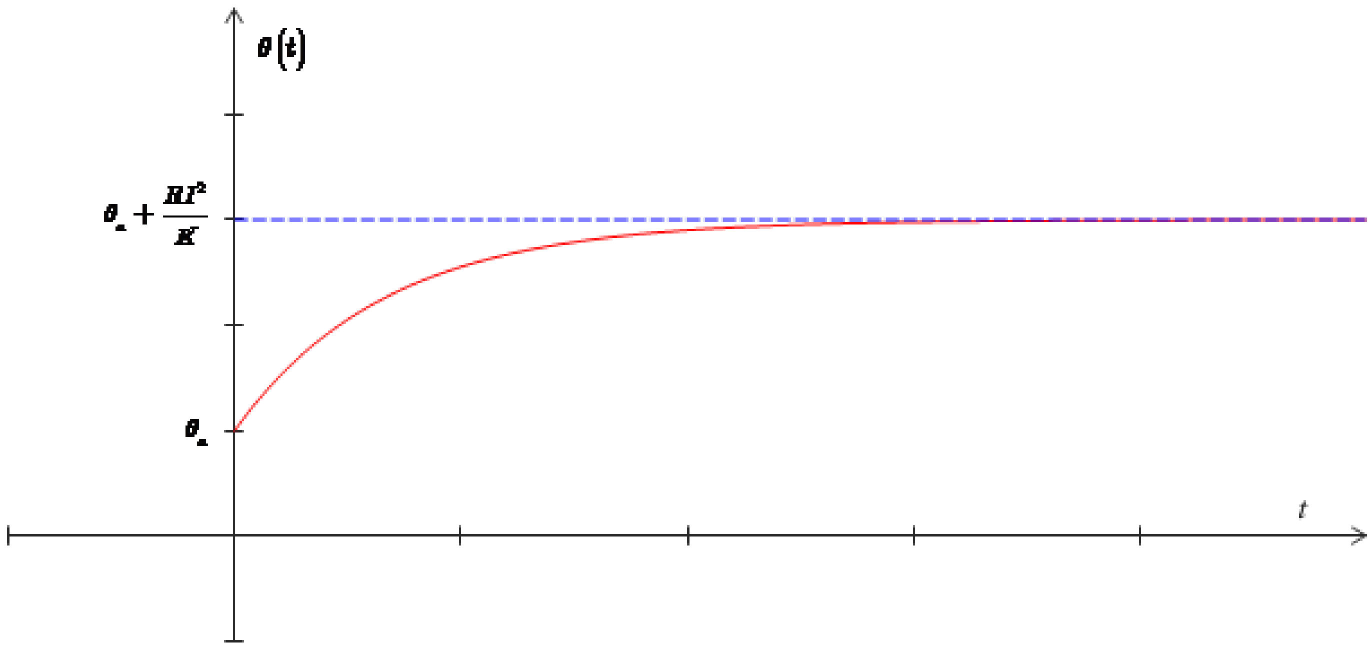
Comme $\theta\left(t = 0\right) = \theta_a$ l'intégration donne :

$$-\frac{mc_p}{K}\left(\ln\left(RI^2 - K\left(\theta - \theta_a\right)\right) - \ln RI^2\right) = t$$

$$\ln\left(\frac{RI^2 - K\left(\theta - \theta_a\right)}{RI^2}\right) = -\frac{K}{mc_p}t$$

$$\frac{RI^2 - K\left(\theta - \theta_a\right)}{RI^2} = \exp\left(-\frac{K}{mc_p}t\right)$$

$$\boxed{\theta = \theta_a + \frac{RI^2}{K}\left(1 - \exp\left(-\frac{K}{mc_p}t\right)\right)}$$



2. Cas d’une résistance variant avec la température.

L’équation énergétique établie à la question 1 est encore applicable :

$$mc_p d\theta = RI^2 dt - K\left(\theta - \theta_a\right)dt$$

L’expression de la relation de l’évolution de la résistance avec la température permet de réécrire la relation précédente sous la forme :

$$mc_p d\theta = R_a I^2 dt + \left(\alpha R_a I^2 - K\right)\left(\theta - \theta_a\right)dt$$

L’intégration de cette équation différentielle donne :

$$\int_{\theta_a}^{\theta} \frac{mc_p}{R_a I^2 - \left(K - \alpha R_a I^2\right)\left(\theta - \theta_a\right)} d\theta = t$$

$$-\frac{mc_p}{\left(K - \alpha R_a I^2\right)}\left[\ln\left(R_a I^2 - \left(K - \alpha R_a I^2\right)\left(\theta - \theta_a\right)\right)\right]_{\theta_a}^{\theta}$$

$$\boxed{\theta\left(t\right) = \theta_a + \frac{R_a I^2}{\left(K - \alpha R_a I^2\right)}\left(1 - \exp\left(-\frac{\left(K - \alpha R_a I^2\right)}{mc_p} t\right)\right)}$$

Pour $t \to \infty$ l’expression de la température est :

$$\theta\left(t \to \infty\right) = \theta_a + \frac{R_a I^2}{\left(K - \alpha R_a I^2\right)} > \theta_a + \frac{R_a I^2}{K}$$