T3.14. Couplage par une colonne de mercure dans un tube en U.

1. Paramètres de l'état final.

- Comme le fluide est indilatable les longueurs après chauffage s'expriment par :

  $l_d = l_o + x$, $l_g = l_o - x$

- Comme le compartiment gazeux de droite constitue un système fermé et que la température y est maintenue constante par un thermostat, la loi des gaz parfaits permet d'écrire :

  $P_d\left(l_o - x\right)s = P_o l_o s = nRT_o$

  $$P_d = P_o \frac{l_o}{l_o - x}$$

- L'équation de l'hydrostatique appliquée aux surfaces de séparation mercure-gaz donne :

  $P_g = P_d + 2\rho g x$

  $$P_g = P_o \frac{l_o}{l_{o-x}} + 2\rho g x$$

- Comme le compartiment de droite est maintenu à température constante par un thermostat on a :

  $T_d = T_o$

  La loi des gaz parfait permet d'écrire pour le gaz du compartiment gauche qui constitue un système fermé :

  $$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_g V_g}{T_g} \rightarrow T_g = T_o \frac{P_g}{P_o}\frac{l_g}{l_o}$$

  $$T_g = T_o \frac{l_o + x}{l_o}\left(\frac{l_o}{l_o - x} + \frac{2\rho g x}{P_o}\right)$$

2. Bilans énergétiques.

Comme la transformation est supposée mécaniquement réversible et qu'elle s'effectue à température constante pour le gaz du compartiment de droite, on pose alors que le gaz évolue de manière isotherme. Le premier principe s'écrit :

$$\Delta U_d = W_d + Q_d = 0$$

$$W_d = -\int p_{ext} dV \underset{réversible}{=} -\int P_d dV_d = -\int RT_o \frac{dV_d}{V_d} = -RT_o \ln\frac{l_o - x}{l_o} > 0$$

$$Q_d = -W_d = RT_o \ln\frac{l_o - x}{l_o} < 0$$

Pour le gaz du compartiment de gauche :

$$\Delta U_g = \frac{R}{\gamma - 1}\left(T_g - T_o\right)$$

D'autre part :

$$W_g = -\int P_g dV_g \text{ or : } P_g = P_d + 2\rho g x \text{ et } dV_g = -dV_d = s dx$$

$$W_g = -\int \left(P_d + 2\rho g x\right)\left(-dV_d\right) = -W_d - \int 2\rho g x s dx$$

$$W_g = RT_o \ln\frac{l_o - x}{l_o} - \rho g s x^2$$

On obtient la quantité de chaleur échangée :

$$Q_g = \Delta U_g - W_g$$

$$Q_g = \frac{R}{\gamma - 1}\left(T_g - T_o\right) - RT_o \ln\frac{l_o - x}{l_o} + \rho g s x^2$$

$$Q_g = \frac{R}{\gamma - 1} T_o \left(\frac{l_o + x}{l_o} \left(\frac{l_o}{l_o - x} + \frac{2\rho g x}{P_o} \right) - 1 \right) - RT_o \ln\frac{l_o - x}{l_o} + \rho g s x^2$$

3. Bilan énergétique mécanique sur le système dans son ensemble.

Comme la variation d'énergie cinétique pour le système global défini dans le texte est nulle, on obtient en négligeant le travail des forces de pesanteur pour les gaz :

$$\Delta E_c = 0 = W_{\substack{forces \\ \text{intérieures}}} + W_{\substack{forces \\ \text{extérieures}}} = W_{gaz\ droit} + W_{gaz\ gauche} + W_{Hg}$$

$$W_{Hg} = -\left(W_{gaz\ droit} + W_{gaz\ gauche}\right) = \rho g s x^2$$