T3.4. Bilan énergétique sur un cycle.

1. Chaleur reçue.

Sur un cycle la variation d'énergie interne est nulle on a donc :

$$\Delta U = W_{cycle} + Q_{cycle} = 0 \Rightarrow Q_{cycle} = -W_{cycle}$$
$$W_{cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$

Les transformations *AB* et *CD* sont isochores, le gaz n'échange pas de travail avec le milieu extérieur sur ces transformations : $W_{AB} = W_{CD} = 0$.

Les transformations *BC* et *DA* sont isobares, il s'en suit pour une de ces transformations les relations suivantes :

$W = -\int p_{ext} dV = -\int p_{gaz} dV$ car une transformation isobare est mécaniquement réversible

$W = -p_{gaz} \Delta V$ car la pression du gaz est constante pendant la transformation

On obtient :

$$W_{BC} = -p_2 \left(V_2 - V_1\right)$$
$$W_{DA} = -p_1 \left(V_1 - V_2\right)$$

La quantité de chaleur échangée sur le cycle s'écrit alors :

$$Q_{cycle} = -W_{BC} - W_{DA} = p_2 \left(V_2 - V_1\right) + p_1 \left(V_1 - V_2\right)$$
$$Q_{cycle} = \left(p_2 - p_1\right)\left(V_2 - V_1\right)$$
$$Q_{cycle} = 4 \times 1,013.10^5 \times 22,4.10^{-3} = 9,1 \text{ kJ}$$

2. Variation d'énergie interne lors de la transformation *AC*.

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

$$\Delta U_{AC} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_C - T_A\right)$$

L'équation d'état d'un gaz parfait permet d'écrire :

$$\Delta U_{AC} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(\frac{P_2 V_2}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR}\right)$$
$$\Delta U_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_2 V_2 - P_1 V_1\right)$$
$$\Delta U_{AC} = \frac{1}{\frac{5}{3} - 1}\left(5 \times 44,8 - 1 \times 22,4\right) \times 1,013.10^5 \times 1,0.10^{-3} = 31 \text{ kJ}$$

3. Chaleur échangée au cours de la transformation *BC*.

Sur une isobare, la chaleur échangée par un gaz parfait est égale à la variation de son enthalpie :

$$Q_{BC} = \Delta H_{BC} = Cp\Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\left(T_C - T_B\right)$$

On utilise de nouveau l'équation d'état du gaz parfait :

$$Q_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(P_2V_2 - P_2V_1\right)$$

$$Q_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}P_2\left(V_2 - V_1\right)$$

$$Q_{BC} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3} - 1}5 \times 1,013.10^5\left(44,8 - 22.4\right).10^{-3} = 28,3 \text{ kJ}$$

4. Chaleur de *A* à *C*.

L'énergie interne étant une fonction d'état, sa variation entre deux états d'équilibre donnés ne dépend pas de la nature de la transformation réalisée entre ces deux états. La variation d'énergie interne déterminée à la question 2 est donc la même pour la transformation envisagée dans cette question. On peut alors écrire :

$$\Delta U_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) = Q'_{AC} + W'_{AC}$$

$$Q'_{AC} = \Delta U_{AC} - W'_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) - W'_{AC}$$

Comme $W'_{AC} = -\int p_{ext}dV = -\int p_{gaz}dV$, le travail apparaît égal à l'opposé de l'aire de la surface sous la droite *AC* que l'on peut décomposer en un triangle *ACD* et un rectangle de côté *AD* et de hauteur *A'A*, *A'* étant le projeté de *A* sur l'axe des abscisses.

$$W'_{AC} = -\left(\frac{1}{2}\left(V_2 - V_1\right)\left(p_2 - p_1\right) + p_1\left(V_2 - V_1\right)\right)$$

$$W'_{AC} = -\left(V_2 - V_1\right)\left(\frac{1}{2}\left(p_2 - p_1\right) + p_1\right) = -\frac{1}{2}\left(V_2 - V_1\right)\left(p_1 + p_2\right)$$

On obtient ainsi :

$$Q'_{AC} = \Delta U_{AC} - W'_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) + \frac{1}{2}\left(V_2 - V_1\right)\left(p_1 + p_2\right)$$

$$Q'_{AC} = 37,4 \text{ kJ}$$