**T2.14. Equilibre d'une sphère flottant sur un liquide.**

**1. Valeurs de ∝.**

La sphère est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède. A l'équilibre de cette sphère on a :

$\rho_s V\vec{g} - \rho_e V'\vec{g} = \vec{0}$ avec $V$ le volume de la sphère et $V'$ le volume immergé de la sphère

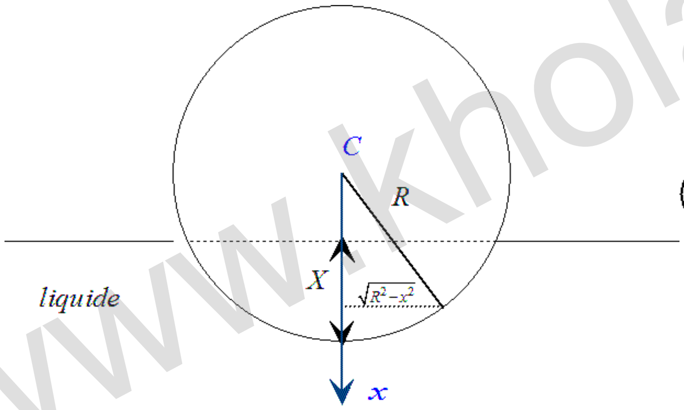
Soit :

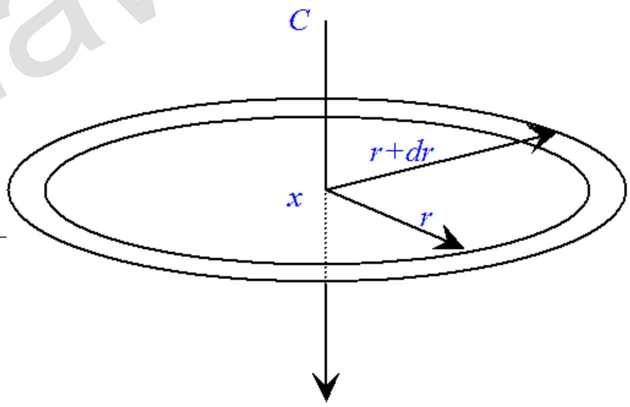
$$\alpha = \frac{\rho_S}{\rho_e} = \frac{V'}{V}$$

Dans le cas d'une immersion totale on a : $V = V' \;\Rightarrow\; \alpha = 1$

Dans le cas où la sphère est à demi-immergée on a : $V' = \frac{1}{2}V \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2}$

**2. Expressions de *b* et *c*.**




A l'équilibre de la sphère :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S = \rho_e V'$$

$$V' = \iiint_{immergé} dV'$$

$$V' = 2\pi \int_{R-X}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} r\,dr = \pi \int_{R-X}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx$$

$$V' = \pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{R-X}^{R} = \pi X^2 \left( R - \frac{X}{3} \right)$$

D'où :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S = \rho_e \pi X^2 \left( R - \frac{X}{3} \right)$$

$$4R^3 \rho_S = \rho_e X^2 \left(3R - X\right)$$

$$3R - X = 4\frac{R^3 \rho_S}{X^2 \rho_e} = 4\frac{R^3}{X^2}\alpha$$

Par identification on obtient :

$$b = 3R \;;\; c = 4\alpha R^3$$

**3. Nature du mouvement.**

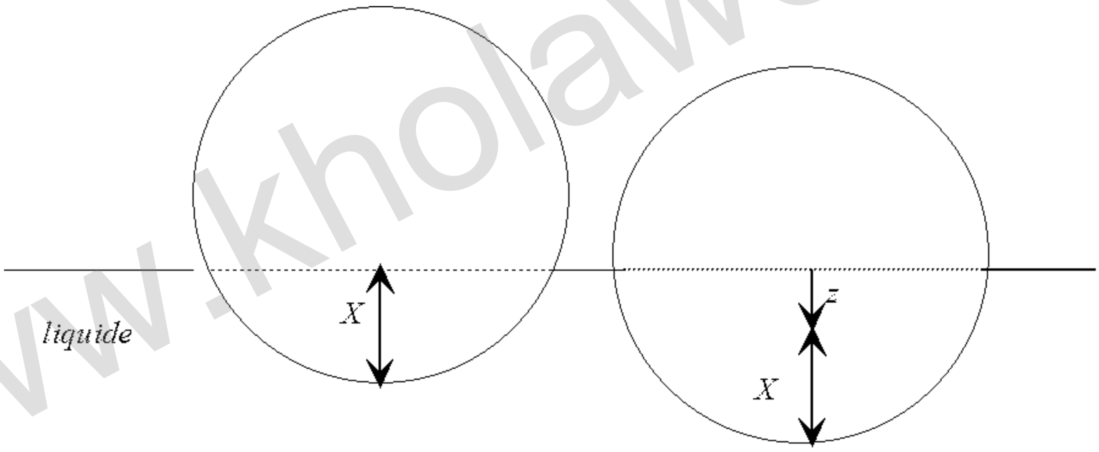
A l'équilibre de la sphère : $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S \vec{g} - \rho_e V'\vec{g} = \vec{0}$ (1)

A une date *t* quelconque : $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S \vec{g} - \rho_e V''\vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S \vec{a}$ (2)

En soustrayant (1) à (2) :

$-\rho_e \Delta V \vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S \vec{a}$ En projection suivant la verticale descendante on obtient :

$-\rho_e \Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S \ddot{z}$ (3)




$\Delta V$ représente la variation de volume immergé de la sphère.

$$\Delta V = \pi\left(X+z\right)^2\left(R-\frac{X+z}{3}\right)-\pi X^2\left(R-\frac{X}{3}\right)$$

Dans le cas où *z* est petit devant *X*, on obtient après développement et en ne conservant que les termes d'ordre 1 en *z* :

$$\Delta V = \pi X\left(2R-X\right)z \quad (4)$$

En injectant (4) dans (3) :

$$\ddot{z} + \frac{3}{4}\frac{gX\left(2R-X\right)}{\alpha R^3}z = 0$$

La sphère est animée d'un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{gX\left(2R-X\right)}{\alpha R^3}}$$