T2.11. Modèles d'atmosphère.

1. Condition d équilibre.
On considère un élément cylindrique d'atmosphère de section S compris entre les altitudes z et $z+dz$.
Ce système est soumis :
à son poids $\vec{P} = -\rho S dz g \vec{u}_z$ avec $\vec{u}_z$ vertical vers le haut
aux forces de pression sur les sections en z et $z + dz$: $p(z) S\vec{u}_z$ et $-p(z+dz) S\vec{u}_z$. Du fait de la symétrie du système choisi, les forces de pression latérales se compensent.
On obtient par projection suivant $\vec{u}_z$ et par simplification par S :

$$-P(z+dz) + P(z) - \rho g dz = 0$$

$$-\frac{dP}{dz} dz - \rho g dz = 0$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (1)$$

2. Expression de la pression.
On suppose l'air, assimilable à un gaz parfait, immobile dans le référentiel terrestre considéré galiléen.
L'intensité g de la pesanteur est posée constante.
La température de l'air est uniforme et a pour valeur T_o.
Comme l'air est assimilé à un gaz parfait on peut écrire que :

$$PV = nRT_o \text{ or } n = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M} \text{ d'où :}$$

$$P = \frac{RT_o \rho}{M} \Rightarrow \rho = \frac{PM}{RT_o}$$

En explicitant la masse volumique dans l'équation (1) on obtient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT_o} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_o} dz \quad (2)$$

$$d \ln P = -\frac{Mg}{RT_o} dz \Rightarrow \ln P = \ln K - \frac{Mgz}{RT_o}$$

$$P = P_o \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_o}\right)$$

AN : $P = 0,28$ atm

3. Hypothèses.

L'intensité de la pesanteur suit une loi de la forme : $g(z) = g(0)\dfrac{R_T^2}{(R_T+z)^2}$ avec R_T rayon de la Terre .

Comme $R_T = 6400$ km $>>$ hauteur de l'atmosphère on peut considérer que g est une constante.
Plus on s'élève dans l'atmosphère, plus la pression diminue et plus le comportement de l'air tend vers celui d'un gaz parfait.
L'hypothèse la moins réaliste est celle de l'uniformité de la température.

4. Loi de pression.
On se place dans le cadre de la statique des fluides avec le champ de pesanteur uniforme et l'air assimilé à un gaz parfait. La pression suit une loi de la forme :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

L'air étant supposé suivre la loi des gaz parfaits, on a :

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \text{ avec } M \text{ "masse molaire" de l'air}$$

$$P = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \rho\frac{RT}{M} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{PM}{RT}$$

On obtient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz = -\frac{Mg}{R}\frac{dz}{\left(T_o + Az\right)} = -\frac{Mg}{AR}\frac{d\left(T_o + Az\right)}{\left(T_o + Az\right)}$$

$$\ln P = \ln K - \frac{Mg}{AR}\ln\left(T_o + Az\right)$$

Comme pour $z = 0$ on a $P = P_o$ et $T = T_o$:

$$\ln P_o = \ln K - \frac{Mg}{AR}\ln T_o$$

$$\ln P = \ln P_o - \frac{Mg}{AR}\ln\left(T_o + Az\right) + \frac{Mg}{AR}\ln T_o$$

$$\ln\frac{P}{P_o} = -\frac{Mg}{AR}\ln\left(\frac{T_o + Az}{T_o}\right)$$

$$\frac{P}{P_o} = \exp\left(\ln\left(\frac{T_o + Az}{T_o}\right)^{-\frac{Mg}{AR}}\right)$$

$$P = P_o\left(1 + \frac{A}{T_o}z\right)^{-\frac{Mg}{AR}}$$

5. Applications numériques.

$$T_1 = 228{,}5 \text{ K}$$

$$P_1 = 24{,}2 \text{ kPa}$$

6. Atmosphère adiabatique.

Dans ce modèle il y a absence d'échange d'énergie par chaleur entre deux masses d'air voisines. Si l'on suppose de plus que l'air est assimilable à un gaz parfait en évolution mécaniquement réversible et que le coefficient γ est constant, la loi de Laplace est alors vérifiée.

7. Expression de la température.

On introduit le coefficient β dans l'équation (2) :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz = -\beta\frac{T_o}{T}dz \quad (3)$$

La loi de Laplace s'écrit en fonction de la pression et de la température :

$$P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cste$$

On effectue la différentielle logarithmique de cette expression :

$$(1-\gamma)\frac{dP}{P}+\gamma\frac{dT}{T}=0$$

$$-(1-\gamma)\beta\frac{T_o}{T}dz+\gamma\frac{dT}{T}=0$$

$$dT=-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\beta T_o dz$$

$$T-T_o=-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\beta T_o z$$

On obtient finalement :

$$T=T_o\left(1-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\beta z\right)$$

8. Nouvelle expression de la pression.

On explicite la constante dans la loi de Laplace :

$$P^{1-\gamma}T^{\gamma}=P_o^{1-\gamma}T_o^{1-\gamma}$$

$$P=P_o\left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P=P_o\left(1-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\beta z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$