M9.22. Pendule à point d'attache mobile.

1. Longueur du fil.

Le référentiel R' est fixe dans le référentiel galiléen R . Ce référentiel R' est donc galiléen.

On étudie la masse m dans ce référentiel R' qui est soumise à :

$$\text{son poids } \vec{P} = m\vec{g}$$

la tension $\vec{T}$ du fil.

On applique le théorème du moment cinétique à M par rapport au point O' et cela dans le référentiel R' .

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(P)}{dt} \right)_{R'} = \overline{O'P} \wedge \vec{P} + \overline{O'P} \wedge \vec{T}$$

Or :

$$\vec{L}_{O'}(M) = \overline{O'M} \wedge m\vec{v}_{M/R'} = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_{O'}(M) = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

On obtient pour la dérivée du moment cinétique par rapport au temps dans R' :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)}{dt} \right)_{R'} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

Pour les moments des différentes forces :

$$\vec{M}_{O'}^{\vec{P}} = \overline{O'P} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge mg(-\vec{e}_y) = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_{O'}^{\vec{T}} = \overline{O'P} \wedge \vec{T} = \vec{0} \text{ car ces deux vecteurs sont colinéaires}$$

L'application du théorème du moment cinétique donne :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Dans le cas où l'angle reste petit, on fait l'approximation suivante :

$$\sin \theta \approx \theta$$

On obtient alors l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0}$$

La solution de cette équation différentielle, caractéristique d'un oscillateur harmonique, fait apparaître une période T des oscillations de la masse m d'expression :

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow l = g \frac{T_o^2}{4\pi^2}$$

$$l = 9,8 \frac{1^2}{4 \times 3,14^2} = 0,25 \text{ m}$$

2. Moment des différentes forces.

On étudie la masse m dans le référentiel R' . Elle est soumise à :

$$\text{son poids } \vec{P} = mg\vec{e}_z ;$$

la tension $\vec{T}$ du fil ;

$$\text{la force d'inertie d'entraînement } \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e .$$

Comme R' est en translation, la force d'inertie de Coriolis est nulle et la force d'inertie d'entraînement à pour expression :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{O'/R} = -ma\vec{e}_x \text{ car tous les points du référentiels } R' \text{ ayant même vecteur accélération, en particulier celui du point } O', \text{ le point coïncident à } P \text{ a même vecteur accélération que } O'.$$

Pour les moments des différentes forces :

$$\vec{M}_{O'}^{\vec{P}} = \vec{O}'\vec{M} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge (-mg\vec{e}_y) = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_{O'}^{\vec{T}} = \vec{O}'\vec{M} \wedge \vec{T} = \vec{0} \text{ car ces deux vecteurs sont colinéaires}$$

$$\vec{M}_{O'}^{\vec{F}_{ie}} = \vec{O}'\vec{M} \wedge \vec{F}_{ie} = l\vec{e}_r \wedge (-ma\vec{e}_x) = -mla \cos \theta \vec{e}_z$$

3. Equation différentielle du mouvement.

On applique le théorème du moment cinétique à P par rapport au point O' et cela dans le référentiel R' .

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(P)}{dt} \right)_{R'} = \vec{O}'\vec{P} \wedge \vec{P} + \vec{O}'\vec{P} \wedge \vec{T} + \vec{O}'\vec{P} \wedge \vec{F}_{ie}$$

Or :

$$\vec{L}_{O'}(P) = \vec{O}'\vec{P} \wedge m\vec{v}_{P/R'} = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_{O'}(M) = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

On obtient pour la dérivée du moment cinétique par rapport au temps dans R' :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(P)}{dt} \right)_{R'} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

L'application du théorème du moment cinétique donne :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = -mgl \sin \theta \vec{e}_z - mla \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{a}{l} \cos \theta = 0}$$

4. Equilibre du pendule.

A l'équilibre du pendule dans le référentiel R' on a :

$$\theta = \theta_o \text{ et } \ddot{\theta} = 0$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$g \sin \theta_o + a \cos \theta_o = 0 \Rightarrow \tan \theta_o = -\frac{a}{g} < 0$$

$$\boxed{\theta_o = -\arctan \frac{a}{g}}$$

5. Période des oscillations.

On considère des petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_o et on pose alors $\theta = \theta_o + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$ rad. On injecte cette expression de l'angle polaire dans celle de l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l} \sin(\theta_o + \varepsilon) + \frac{a}{l} \cos(\theta_o + \varepsilon) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l} (\sin \theta_o \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cos \theta_o) + \frac{a}{l} (\cos \theta_o \cos \varepsilon - \sin \theta_o \sin \varepsilon) = 0$$

Comme l'écart par rapport à la position d'équilibre est faible on peut écrire :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l} (\sin \theta_o + \varepsilon \cos \theta_o) + \frac{a}{l} (\cos \theta_o - \varepsilon \sin \theta_o) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{g}{l} \sin \theta_o + \frac{a}{l} \cos \theta_o}_{=0 \text{ car caractérise l'équilibre}} + \left(\frac{g}{l} \cos \theta_o - \frac{a}{l} \sin \theta_o \right) \varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{l} \cos \theta_o - \frac{a}{l} \sin \theta_o \right) \varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\cos \theta_o}{l} (g - a \tan \theta_o) \varepsilon = 0$$

$$\text{or } \tan \theta_o = -\frac{a}{g} \text{ et } \cos \theta_o = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_o}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{l} \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} \left(g + \frac{a^2}{g} \right) \varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} \varepsilon = 0$$

Ceci est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de période T d'expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$$