M9.20. Oscillations paramétriques d'un pendule simple.

On se place dans le référentiel non galiléen (R') animé d'un mouvement rectiligne accéléré par rapport au référentiel terrestre (R) que l'on pose galiléen.

On étudie dans (R') le mouvement de la masse *m* et on utilise le théorème de l'énergie mécanique qui s'écrit dans (R') :

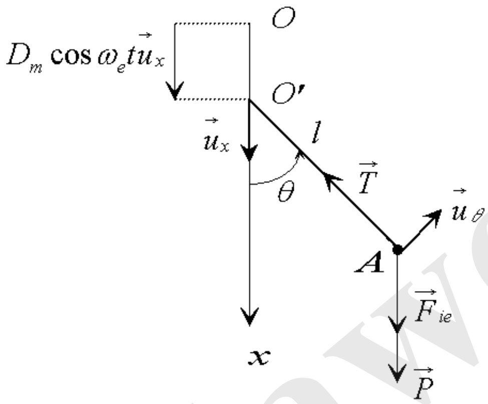
$\frac{dE_m}{dt} = P'$ avec *P'* puissance des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

La masse *m* est soumise à :

$\vec{P} = m\vec{g}$ son poids

$\vec{T}$ la tension de la tige

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ la force d'inertie d'entraînement



La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel d'étude est en translation.

L'avantage de travailler dans le référentiel (R') tient au fait que la puissance de la tension qu'exerce la tige sur la masse est nulle dans ce référentiel alors qu'elle ne l'est pas dans (R).

On obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(E_c + E_p\right) = -m\vec{a}_e.\vec{v}_{A/R'} = -m\vec{a}_{O'/R'}.\vec{v}_{A/R'}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_{A/R'}^2 - mgl\cos\theta + cste\right) = -m\frac{d}{dt}\left(D_m\cos\omega_e t\vec{u}_x\right).l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = m\omega_e^2 D_m\cos\omega_e t\vec{u}_x.l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = \omega_e^2 D_m\cos\omega_e t\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{\omega_e^2 D_m\cos\omega_e t}{l}\right)\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0 \quad \text{avec } \omega^2 = \omega_o^2\left(1 + \frac{\omega_e^2 D_m\cos\omega_e t}{l}\right)$$

Dans le cas où l'angle θ est petit, la masse *m* oscille avec une pulsation qui dépend du temps avec une composante sinusoïdale.