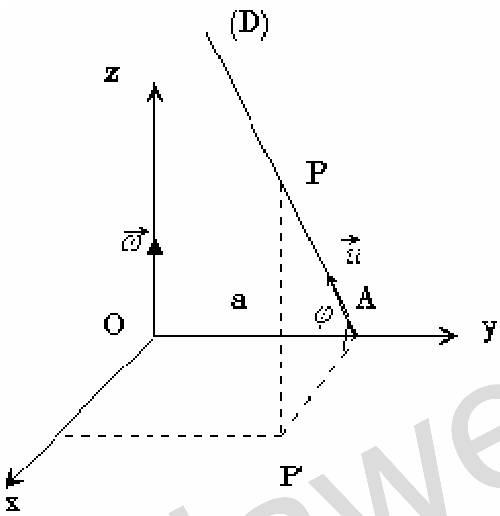
M9.17. Mouvement et équilibre relatif d'une particule sur une tige en rotation.

Une particule *P*, de masse *m*, glisse sans frottement sur une droite (D), qui tourne autour de l'axe vertical *Oz*, sans le rencontrer, avec une vitesse angulaire constante ω. On étudiera le mouvement relatif de *P* par rapport au référentiel orthonormé non galiléen ($\Re$) *Oxyz* lié à la droite (D), où *Oy* a la direction de la perpendiculaire $OA = a$, à *Oz* et à (*D*).
Soit φ l'angle <u>constant</u> que fait (*D*) avec le plan horizontal *xOy*. On pose $AP = r$.
On désignera par g l'accélération de la pesanteur et par $\vec{u}$ le vecteur unitaire de (D).
On supposera le référentiel terrestre ($\Re_T$) galiléen.



1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans ($\Re$) et en tenant compte que la réaction est orthogonale à (D) du fait de l'absence de frottement, montrer que le mouvement relatif de P dans ($\Re$) obéit à une équation différentielle du second ordre du type : $\ddot{r} - \alpha r = \beta$.
   On exprimera les constantes α et β en fonction de ω, φ et g.
2. En déduire la loi *r(t)* du mouvement. (Comme les conditions initiales ne sont pas données, on ne cherchera pas à exprimer les différentes constantes qui apparaissent dans l'expression de *r(t)*).
3. Déterminer la position *Po* où la particule est en équilibre relatif.
4. Pour déterminer la stabilité de cet équilibre, on imagine un petit déplacement ε autour de la position d'équilibre, tel que $r = r_o + \varepsilon$.
   Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ε.
   Déterminer $\varepsilon(t)$ et conclure sur la stabilité de la position d'équilibre relative.