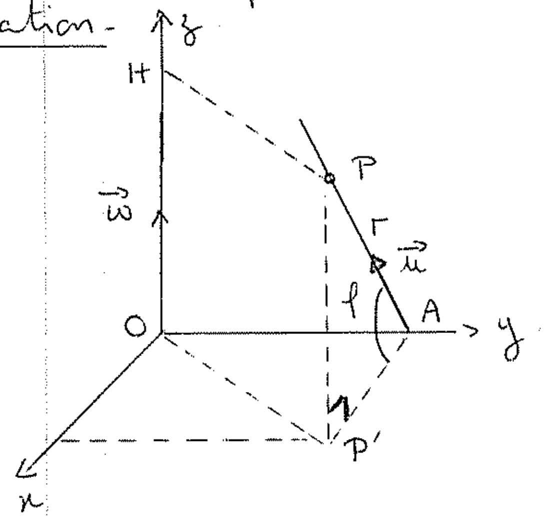
M9_17

Mouvement et équilibre relatif d'une particule sur une tige en rotation.



1. Equation différentielle

Le point P, de masse m, est étudié dans le référentiel R non galiléen. Ce point est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- La réaction $\vec{R}$ de la droite (D)
- à la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\,\vec{\omega}_{R/R_T} \wedge \vec{v}_{P/R}$
- — d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\,\overrightarrow{HP}$

(le mouvement du point coïncident de D avec P étant circulaire uniforme ds R_T)

La relation de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R} - 2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P/R} + m\omega^2\,\overrightarrow{HP} = m\,\frac{d\vec{v}_{P/R}}{dt}$$

Par projection. (Voir autre méthode en fin d'exercice)

$$m\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} - 2m\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{vmatrix} + m\omega^2\begin{vmatrix} HP_x \\ HP_y \\ 0 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OP'} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On obtient :

$$\begin{cases} R_x + m\omega^2 x = m\ddot{x} & (1) \\ R_y - 2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y = 0 & (2) \\ -mg + R_z = m\ddot{z} & (3) \end{cases}$$

Or $x = AP' = r\cos\varphi$
$y = OA = a$
$z = P'P = r\sin\varphi$

D'autre part comme les frottement sont négligés, on a :
$\vec{R}\cdot\vec{u} = 0 = R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z = 0$
or $\vec{u}\,(\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$ d'où :

$$R_x \cos\varphi + R_z \sin\varphi = 0 \quad (4)$$

En tenant des équations (1) et (3), on remplace R_x et R_z dans (4)

$$m(\ddot{x} - \omega^2 x)\cos\varphi + m(\ddot{z} + g)\sin\varphi = 0$$

Compte tenu des expressions de x et z :

$$(\ddot{r}\cos\varphi - \omega^2 r\cos\varphi)\cos\varphi + (\ddot{r}\sin\varphi + g)\sin\varphi = 0.$$

$$\boxed{\ddot{r} - \omega^2\cos^2\varphi\, r = -g\sin\varphi} \quad (5)$$

D'où : $\alpha = \omega^2\cos^2\varphi$ et $\beta = -g\sin\varphi$

b. Solution $r(t)$

On recherche des solutions de la forme e^{st} pour l'équation homogène : On obtient

$$s^2 - \omega^2\cos^2\varphi = 0 \implies s = \pm\,\omega\cos\varphi$$

La solution particulière est :

$$r_p = \frac{g}{\omega^2}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

On obtient

$$\boxed{r = A\exp(\omega\cos\varphi.t) + B\exp-(\omega\cos\varphi.t) + \frac{g\sin\varphi}{\omega^2\cos^2\varphi}}$$

3 - Position P_0

La position d'équilibre est obtenue pour $\ddot{r} = 0$. D'où

$$\boxed{r_0 = \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

4 - Stabilité de l'équilibre -

Soit $r = r_0 + \varepsilon$ avec $r_0 = \text{cste}$

La relation (5) s'écrit alors :

$$\ddot{\varepsilon} - \omega^2\cos^2\varphi\,(r_0 + \varepsilon) = -g\sin\varphi$$

$$\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2\cos^2\varphi\,\varepsilon = \omega^2\cos^2\varphi\, r_0 - g\sin\varphi = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2\cos^2\varphi\,\varepsilon = 0}$$

La solution de cette équation est

$$\varepsilon(t) = A\exp(-\omega_0 t\cos\varphi) + B\exp(\omega_0 t\cos\varphi)$$

or pour $t \to \infty$, $\varepsilon(t) \to \infty$: l'équilibre est donc instable.

Autre méthode pour la résolution de la question 1

La relation de la dynamique permet d'écrire que :

$$m\vec{g} + \vec{R} - 2m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/R} + m\omega^2\,\overrightarrow{HP} = m\frac{d\vec{v}_{P/R}}{dt}$$

On projette cette équation suivant le vecteur $\vec{u}$. D'où

$$m\vec{g}\cdot\vec{u} + \vec{R}\cdot\vec{u} - 2m(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/R})\cdot\vec{u} + m\omega^2\,\overrightarrow{HP}\cdot\vec{u} = m\vec{a}\cdot\vec{u}$$

Or $\vec{R}\cdot\vec{u} = 0$ car absence de frottements

$(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/R})\cdot\vec{u} = 0$ car $\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/R} \perp$ à $\vec{u}$ car $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}$

On a alors

$$m\vec{g}\cdot\vec{u} + m\omega^2\,\overrightarrow{HP}\cdot\vec{u} = m\vec{a}\cdot\vec{u}$$

$$-mg\sin\varphi + m\omega^2\,\overrightarrow{OP'}\cdot\vec{u} = m\ddot{r} \qquad \text{or } \overrightarrow{OP'}\cdot\vec{u} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP'})\cdot\vec{u} = \overrightarrow{AP'}\cdot\vec{u}$$

$$-mg\sin\varphi + m\omega^2 r\cos^2\varphi = m\ddot{r}$$

On retrouve ainsi l'équation différentielle