M9.9. Pendule simple. Mouvement de translation rectiligne du point d'attache.

1. Equation différentielle.

On étudie la masse *m* dans le référentiel *R'*. Elle est soumise à son poids :
à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$;
à la tension $\vec{T}$ du fil ;
à la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\vec{a}_e$.
Comme *R'*est en translation, la force d'inertie de Coriolis est nulle et la force d'inertie d'entraînement à pour expression :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\vec{a}_{O'/R} = -m\ddot{x}\vec{e}_x = mX\Omega^2 \sin\Omega t\vec{e}_x .$$

On applique le théorème du moment cinétique à *M* par rapport au point *O'* et cela dans le référentiel *R'*.

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{O'M} \wedge \overrightarrow{F_{ie}}$$

Or :

$$\vec{L}_{O'}(M) = \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v}_{M/R'} = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_{O'}(M) = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_y$$

On obtient pour la dérivée du moment cinétique par rapport au temps dans *R'* :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M)}{dt}\right)_{R'} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_y$$

Pour les moments des différentes forces :

$$\overrightarrow{M}_{O'}^{\vec{P}} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_z = -mgl\sin\theta\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{M}_{O'}^{\vec{T}} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{T} = \vec{0} \text{ car ces deux vecteurs sont colinéaires}$$

$$\overrightarrow{M}_{O'}^{\overrightarrow{F_{ie}}} = \overrightarrow{O'M} \wedge \overrightarrow{F_{ie}} = l\vec{e}_r \wedge mX\Omega^2 \sin\Omega t\vec{e}_x = mlX\Omega^2 \sin\Omega t\cos\theta\vec{e}_y$$

L'application du théorème du moment cinétique donne :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_y = -mgl\sin\theta\vec{e}_y + mlX\Omega^2 \sin\Omega t\cos\theta\vec{e}_y$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{X}{l}\Omega^2 \sin\Omega t\cos\theta$$

Dans le cas où l'angle reste petit, on fait les approximations suivantes :

$$\sin\theta \approx \theta \quad ; \quad \cos\theta \approx 1$$

On obtient alors l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{X}{l}\Omega^2 \sin\Omega t}$$

2. Solution.

On recherche des solutions de la forme $\theta = \theta_{\max}\cos(\Omega t + \varphi)$ qui caractérise le régime forcé. Pour cela on utilise la notation complexe pour déterminer l'amplitude des oscillations en posant :

$$\tilde{\theta} = \theta_{\max} \exp j(\Omega t + \varphi) = \tilde{\theta}_{\max} \exp j\Omega t$$

En injectant cette expression dans l'équation différentielle et après simplification du terme temporel on obtient :

$$-\Omega^2 \tilde{\theta}_{\max} + \frac{g}{l} \tilde{\theta}_{\max} = \frac{X}{l} \Omega^2 \exp - j\frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{\theta}_{\max} = \frac{X\Omega^2}{l\left(\left(\frac{g}{l}\right)^2 - \Omega^2\right)} \exp - j\frac{\pi}{2}$$

L'amplitude des oscillations est donc :

$$\theta_{\max} = \left|\tilde{\theta}_{\max}\right| = \frac{X\Omega^2}{l\left|\left(\frac{g}{l}\right)^2 - \Omega^2\right|}$$

$$\boxed{\theta = \frac{X\Omega^2}{l\left|\left(\frac{g}{l}\right)^2 - \Omega^2\right|} \cos(\Omega t + \varphi)}$$