

M9.8. Mouvement d'une particule contenue dans un tube en rotation.

On étudie la bille de masse m dans le référentiel (R) lié au tube. A une date t , ce système est soumis à :

- son poids $\vec{P}$
- à la réaction $\vec{R}$ du plateau, perpendiculaire au plateau du fait de l'absence de frottement.
- à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{OM}$ car le plateau est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz .
- à la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$, perpendiculaire au tube et comprise dans le plan xOy .

La relation de la dynamique s'écrit dans le référentiel du tube:

$$m\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2 \overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = m\vec{a}$$

La projection de cette équation suivant le rayon polaire donne :

$$m\omega^2 r = m\ddot{r}$$

D'où :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$r = A \exp \omega t + B \exp (-\omega t)$$

L'utilisation des conditions initiales : $r = d$ et vitesse nulle, permet de déterminer la solution de cette équation :

$$r = d \cosh \omega t$$

La bille arrive à la sortie du tube à la date t_s telle que :

$$a = d \cosh \omega t_s \Rightarrow t_s = \frac{1}{\omega} \cosh^{-1} \left(\frac{a}{d} \right)$$

La vitesse de la bille par rapport au tube a pour expression :

$$\dot{r} = d \sinh \omega t$$

La vitesse de la bille à la sortie du tube est :

$$v = \omega d \sinh \left(\cosh^{-1} \left(\frac{a}{d} \right) \right)$$