M9.7. Mouvement d'un glaçon sur un plateau en rotation.

Enoncé

Un plateau circulaire de centre O et de rayon R tourne autour de l'axe vertical Oz.
La rotation est uniforme de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

A $t = 0$, on dépose un morceau de glace G ponctuel à une distance r_o du point O.

On suppose que la vitesse initiale de G est celle du point du plateau coïncident.

Déterminer le mouvement ultérieur du glaçon.

On donne : $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt}$

M9.7. Mouvement d'un glaçon sur un plateau en rotation.

Corrigé

On étudie le glaçon dans le référentiel non galiléen lié au plateau. A une date *t*, ce système est soumis à :

- son poids $\vec{P}$
- à la réaction $\vec{R}$ du plateau, perpendiculaire au plateau du fait de l'absence de frottement.
- à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$ car le plateau est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe *Oz*.
- à la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$.

La relation de la dynamique s'écrit dans le référentiel du plateau :

$$m\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v} = m\vec{a}$$

La projection de cette équation dans la base cylindro-polaire donne :

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ R \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} m\omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. - 2m \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right. = m \left|\begin{matrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right.$$

On obtient :

$$\ddot{r} - \left(\omega + \dot{\theta}\right)^2 r = 0 \qquad (1)$$

$$-2\dot{r}\omega = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt} \qquad (2)$$

$$R = mg \qquad (3)$$

L'équation (2) peut se mettre sous la forme :

$$-2r\dot{r}\omega = \frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt} \quad \text{or} \quad -2r\dot{r}\omega = -\frac{d\left(r^2\omega\right)}{dt} \quad \text{d'où :}$$

$$-\frac{d\left(r^2\omega\right)}{dt} = \frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt} \quad \text{soit :} \quad \frac{d\left(r^2\dot{\theta} + \omega r^2\right)}{dt} = 0$$

On obtient ainsi une constante du mouvement :

$$r^2\dot{\theta} + r^2\omega = cste$$

Comme à la date $t = 0$, le glaçon est déposé sur le plateau à la distance r_o avec la vitesse du point coïncident, le glaçon est immobile par rapport au plateau. On a donc :

$$\dot{\theta}\left(t = 0\right) = 0 \Rightarrow cste = r_o^{\,2}\omega$$

$$r^2\dot{\theta} + r^2\omega = r_o^{\,2}\omega$$

On peut ainsi exprimer la vitesse angulaire du glaçon à la date *t* :

$$\dot{\theta} = \left(\frac{r_o^{\,2}}{r^2} - 1\right)\omega \qquad (4)$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\ddot{r}-\left(\omega+\left(\frac{r_o^{\,2}}{r^2}-1\right)\omega\right)^2 r=0$$

$$\ddot{r}-\frac{r_o^{\,4}}{r^3}\omega^2=0$$

La multiplication de cette équation par $\dot{r}$ donne :

$$\dot{r}\ddot{r}-\frac{r_o^{\,4}}{r^3}\dot{r}\omega^2=0$$

Cette dernière équation peut alors s'exprimer sous la forme de la dérivée par rapport au temps d'une constante :

$$\dot{r}\ddot{r}-\frac{r_o^{\,4}}{r^3}\dot{r}\omega^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{\omega^2}{2}\frac{r_o^{\,4}}{r^2}\right)=0$$

$$\dot{r}^2+\omega^2\frac{r_o^{\,4}}{r^2}=Cste$$

Comme à la date t = 0 on a $\dot{r}=0$ et $r=r_o$ la constante *Cste* vaut $\omega^2 r_o^{\,2}$:

$$\dot{r}^2+\omega^2\frac{r_o^{\,4}}{r^2}=r_o^{\,2}\omega^2$$

L'expression de la vitesse radiale du glaçon est :

$$\dot{r}=r_o\omega\sqrt{\left(1-\frac{r_o^{\,2}}{r^2}\right)}$$

Pour déterminer $r(t)$ opère une séparation des variables :

$$\frac{dr}{\sqrt{\left(1-\frac{r_o^{\,2}}{r^2}\right)}}=r_o\omega dt$$

Pour la recherche de la primitive on effectue un changement de variable en posant $\frac{r_o^{\,2}}{r^2}=\cos^2 u$ avec $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On obtient alors :

$$r=\frac{r_o}{\cos u}\rightarrow dr=r_o\frac{\sin u}{\cos^2 u}du$$

$$\frac{r_o\frac{\sin u}{\cos^2 u}du}{\sqrt{1-\cos^2 u}}=r_o\frac{1}{\cos^2 u}du=r_o\omega dt$$

$$\tan u=\omega t+cte$$

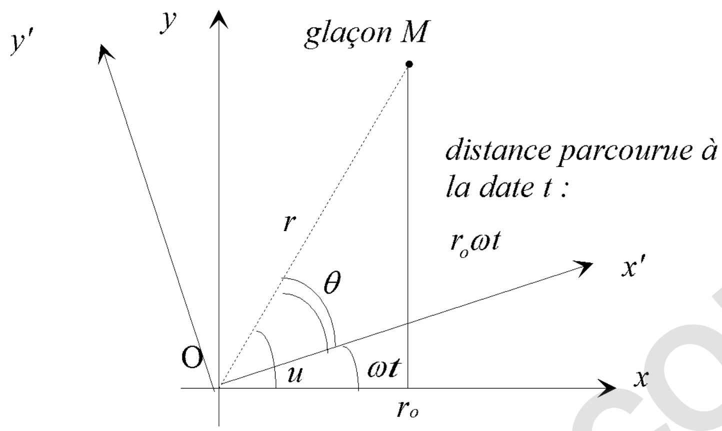
L'application des conditions initiales donne *cte* = 0.

Comme $\frac{1}{\cos^2 u}=1+\tan^2 u$ on obtient :

$$\frac{r^2}{r_o^{\,2}}=1+\omega^2t^2$$

$$\boxed{r=r_o\sqrt{1+\omega^2t^2}}\qquad (5)$$

Ce résultat n'est en fait que le théorème de Pythagore appliqué dans le référentiel galiléen du laboratoire où le glaçon est animé d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $r_o\omega$ et où la grandeur introduite lors du changement de variable n'est autre que l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *Ox* du référentiel terrestre:



$$\tan u = \frac{r_o \omega t}{r_o} = \omega t$$

$$r = r_o\sqrt{1+\omega^2 t^2}$$

Pour déterminer l'évolution de l'angle polaire θ dans le référentiel tournant, on reprend l'équation (4) :

$$\dot{\theta} = \left(\frac{r_o^{\,2}}{r^2} - 1\right)\omega$$

On injecte le résultat de l'équation (5) :

$$\dot{\theta} = \omega\left(\frac{1}{1+\omega^2 t^2} - 1\right)$$

$$d\theta = \frac{d(\omega t)}{1+\omega^2 t^2} - d(\omega t)$$

$$\boxed{\theta = \arctan(\omega t) - \omega t} \quad \text{ou} \quad \theta = u - \omega t$$

Lorsque t tend vers l'infini la vitesse angulaire du glaçon tend vers l'opposé de celle du plateau dans le référentiel du laboratoire.

Pour déterminer la trajectoire du glaçon dans le référentiel du plateau on recherche les équations paramétriques $x'(t)$ et $y'(t)$.

$$\begin{cases} x' = r\cos\theta = r\cos(u-\omega t) = r_o\sqrt{1+\tan^2 u}\,\cos(u-\omega t) \\ y' = r\sin\theta = r\sin(u-\omega t) = r_o\sqrt{1+\tan^2 u}\,\sin(u-\omega t) \end{cases}$$

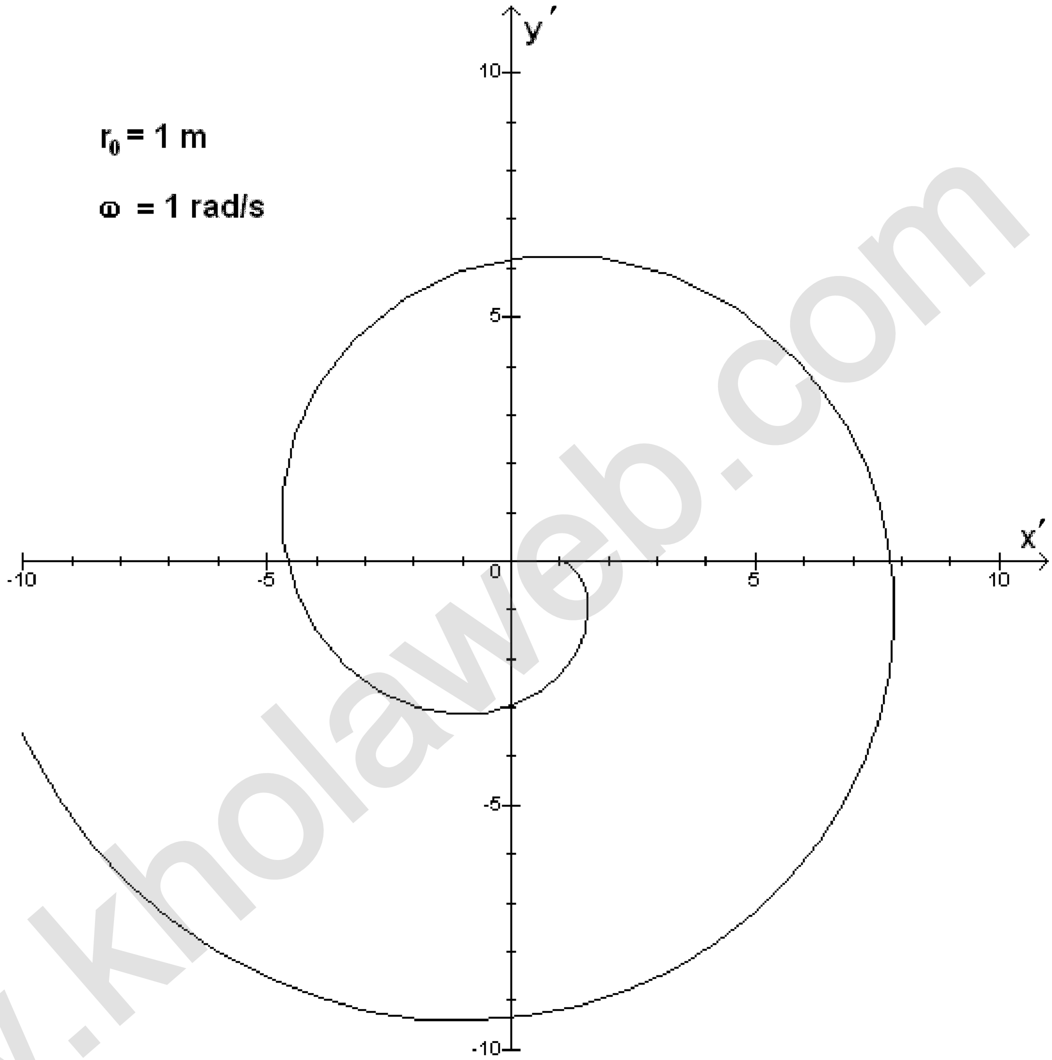
$$\begin{cases} x' = \dfrac{r_o}{\cos u}\cos(u-\omega t) = \dfrac{r_o}{\cos u}(\cos u\cos\omega t + \sin u \sin \omega t) \\ y' = \dfrac{r_o}{\cos u}\sin(u-\omega t) = \dfrac{r_o}{\cos u}(\sin u\cos\omega t - \cos u \sin \omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r_o(\cos\omega t + \tan u \sin\omega t) = r_o(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t) \\ y' = r_o(\tan u\cos\omega t - \sin\omega t) = r_o(\omega t\cos\omega t - \sin\omega t) \end{cases}$$

En posant $\omega = 1{,}0$ rad.s^{-1} et r_o = 1,0 m on a :

$$\begin{cases} x' = \cos t + t\sin t \\ y' = t\cos t - \sin t \end{cases}$$

L'allure de la courbe est alors :


$r_0 = 1$ m
$\omega = 1$ rad/s
y′
x′
10
5
0
-5
-10
-10
-5
5
10