M9.5. Particule sur un axe en rotation incliné par rapport à l'horizontal.

1. Position d'équilibre.

On étudie le point *M* de masse *m* dans le référentiel, non galiléen, lié à la tige *Ox*. Le système est soumis à :

son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

la réaction $\vec{R}$ de la tige, perpendiculaire à la tige

la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$

Remarque : la force d'inertie de Coriolis est nulle car le système est supposé à l'équilibre dans le référentiel tournant.

La relation fondamentale s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} - m\vec{a_e} = \vec{0}$$

Comme le référentiel est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe D, l'accélération d'entraînement s'écrit:

$$\vec{a_e} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

où H est le projeté de M sur l'axe D. On projette l'équation suivant *Ox*:

$$-mg\cos\alpha + mx_o\omega^2\sin^2\alpha = 0$$

$$\boxed{x_o = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2}}$$

2. Equation horaire x(t).

Soit *x* la position du point M à la date *t*.
Au bilan précédent des forces extérieures vient maintenant s'ajouter la force d'inertie de Coriolis.
La relation fondamentale s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} - m\vec{a_e} - m\vec{a_c} = m\vec{a}$$

Suivant *Ox*, les projetés de la réaction et de la force d'inertie de Coriolis sont nuls.
On obtient :

$$-mg\cos\alpha + mx\omega^2\sin^2\alpha = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} - \Omega^2 x = -g\cos\alpha$$

soit :

$$\ddot{x} - \Omega^2 x = -x_o\Omega^2$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$\boxed{x = x_o + a\,ch\,\Omega t}$$