M9.4. Masse sur une tige en rotation autour d'un axe fixe et liée par un ressort.

On étudie la masse *m* dans le référentiel (R) lié à la tige Ox. A une date *t*, ce système est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- à la réaction $\vec{R}$ de la tige, perpendiculaire à la tige du fait de l'absence de frottement.
- à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$ car la tige est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe *Oz*.
- à la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$, perpendiculaire à la tige et comprise dans le plan xOy.
- La tension $\vec{T} = -k(x-l_o)\vec{i}$. La grandeur *x* désigne la position de la masse *m* sur la tige *Ox*.

La relation de la dynamique s'écrit dans le référentiel de la tige :

$$m\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v} + \vec{T} = m\vec{a}$$

La projection de cette équation suivant l'axe *Ox* donne :

$$m\omega^2 x - k(x - l_o) = m\ddot{x}$$

D'où :

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = \frac{k}{m}l_o$$

On pose :

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$$

Pour :

- $$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$$
  $$x = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \frac{k}{k-m\omega^2}l_o$$
  Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes d'intégration *A* et *B*. On trouve :
  $$x = \left(x_o - \frac{k}{k-m\omega^2}l_o\right)\cos\Omega t + \frac{k}{k-m\omega^2}l_o$$
  La masse *m* est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dans le référentiel (*R*).
- $$\omega > \sqrt{\frac{k}{m}}$$
  $$x = A'\exp\Omega t + B'\exp(-\Omega t) + \frac{k}{k-m\omega^2}l_o$$
  Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes d'intégration *A'* et *B'*. On trouve :
  $$x = (x_o - \frac{k}{k-m\omega^2}l_o)\cosh\Omega t + \frac{k}{k-m\omega^2}l_o$$
  La masse *m* est animée d'un mouvement rectiligne dans le référentiel (*R*). Elle s'éloigne du centre *O*. Cela conduit à la rupture du ressort.

- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
  $\ddot{x} = \frac{k}{m} l_o \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{k}{m} l_o t^2 + x_o$
  Mouvement rectiligne qui conduit à la rupture du ressort.