M9.3. Masse sur une tige en rotation autour d'un axe fixe.

1. Vecteurs vitesse et accélération.
Dans le référentiel (*R*) l'anneau de masse *m* est animé d'un mouvement rectiligne.

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{i} \qquad ; \qquad \vec{a} = \ddot{r}\,\vec{i}$$

2. Equations horaire et polaire.
On étudie le point *M* de masse *m* dans le référentiel, non galiléen, lié à la tige *Ox*. Le système est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la réaction de la tige $\vec{R}$, perpendiculaire à la tige en l'absence de frottements.
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$.
  Comme le référentiel (R) est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe *Oz*, l'accélération d'entraînement s'écrit:
  $\vec{a_e} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$
  $\overrightarrow{Fic} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$. Cette force est orthogonale à la tige.

La relation fondamentale s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} - m\vec{a_e} - m\vec{a_c} = m\vec{a}$$

La projection suivant l'axe *Ox* donne :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$r = A\exp\omega t + B\exp(-\omega t)$$

On détermine les constantes d'intégration *A* et *B* en utilisant les conditions initiales :

$$r(t=0) = r_o = A + B$$
$$\dot{r}(t=0) = 0 = A\omega - B\omega$$

On obtient :

$$A = B = \frac{r_o}{2}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} r = r_o\left(\dfrac{\exp\omega t + \exp(-\omega t)}{2}\right) = r_o\cosh\omega t \\ \\ r = r_o\cosh\theta \end{array}}$$

3. Norme de la réaction.

La projection de la relation de la dynamique dans la base du repère lié à (*R*) donne :

$$\left\{\begin{array}{c} R_x = 0 \\ R_y = 2m\omega\dot{r} = 2ma\omega^2\sinh\omega t \\ R_z = mg \end{array}\right.$$

La norme de la réaction a pour expression :

$$\boxed{R = m\left(g^2 + 4a^2\omega^4\sinh^2\omega t\right)}$$