M9.14. Exemple de bifurcation en mécanique.

Un point matériel *A*, de masse *m*, évolue sans frottement sur un guide circulaire *C*, vertical, de centre *O* et de rayon *r*. Le contact se maintient au cours du mouvement: concrètement, *A* peut être représenté par une perle enfilée sur *C*. Ce guide tourne uniformément, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$, ($\Omega > 0$), autour de son diamètre *BH*. Ce dernier est dirigé suivant l'axe vertical ascendant *Oz* d'un référentiel terrestre *R* supposé galiléen.

On caractérise la position de *A* sur *C* par le paramètre angulaire $\theta = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$. En outre, on note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre.

1. Exprimer, en fonction de θ, l'énergie cinétique de *A*, par rapport au référentiel tournant lié au guide *R' = Ox'y'z*.
2. Trouver l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ. On prendra comme origine la valeur à $\theta = \pi/2$.

3a. A quelle condition peut-on appliquer le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel *R'* ?

3b. Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle. En prenant, là aussi, comme origine la valeur à $\theta = \pi/2$, donner l'expression de cette énergie potentielle en fonction de θ.

4. On pose $\Omega_c^2 = \dfrac{g}{r}$. Déduire de ce qui précède que l'énergie potentielle totale peut se mettre sous la forme :

$$Ep = -K\cos\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right)$$

où $\beta = \left(\Omega/\Omega_c\right)^2$ et K une constante que l'on déterminera en fonction de *m*, *g* et *r*.

5a. Etablir, à partir du théorème de l'énergie mécanique appliqué dans le référentiel tournant *R'*, l'équation différentielle à laquelle satisfait θ.

5b. Trouver les positions d'équilibre de *A* dans *R'*. Que peut-on dire de la stabilité de ces positions d'équilibre?

5c. Tracer le graphe donnant la position d'équilibre stable $\theta_e \neq 0$ en fonction de Ω. On précisera les valeurs de la pente $d\theta_e/d\Omega$ pour $\Omega = \Omega_c$ et $\Omega >> \Omega_c$. Le point correspondant à $\Omega = \Omega_c$, est appelé point de "bifurcation". Quelles sont les positions d'équilibre stable pour $\Omega = \Omega_c/\sqrt{2}$ et pour $\Omega = \Omega_c\sqrt{2}$.