M9_14

Exemple de bifurcation en mécanique (1/5)

1. Energie cinétique dans R

Dans R' $\vec{v}_{A/R'} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\, r\vec{e}_r}{dt}\right)_{R'} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Il vient pour l'énergie cinétique

$$\boxed{E_c(A)_{R'} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2}$$

2. Energie potentielle de pesanteur.

Soit Ep cette énergie potentielle. Comme le poids est une force rectangulairement constante, le poids est une force conservative

On a donc

$$dEp = -dW^{\vec{P}} = -m\vec{g}\,d\vec{OA} \qquad \text{or } \vec{g} = -g\vec{e}_z$$

$$dEp = +mg\,dz$$

$$Ep = mgz + Cte \qquad \text{avec } z \text{ grandeur algébrique}$$

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a $z = 0$. Si l'on prend comme origine la valeur de z correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour l'énergie potentielle on a $Cte = 0$

$E_{p_p} = mgz$	$E_{p_p} = -mgr\cos\theta$

Il faut prendre en compte le travail de la force d'inertie d'entraînement, celui de la force d'inertie de Coriolis étant toujours nul.

3. Energie potentielle liée à la force d'inertie d'entraînement.

Soit $Ep_{i,e}$ cette énergie potentielle.

Dans le cas où le référentiel R' est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe de R on a

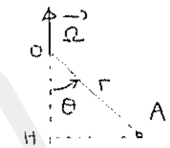
$$\vec{F}_{ie} = m\,\Omega^2_{R'/R}\,\vec{HA} \quad \text{avec H projeté de A sur l'axe de rotation}$$

D'où $dEp_{ie} = -dW^{F_{ie}} = -\vec{F}_{ie}\,d\vec{OA}$

Exemple de bifurcation en mécanique (2/5)

$$dEp_{ie} = -m\Omega^2\,\vec{HA}\,d\vec{OA} = -m\Omega^2\,\vec{HA}\,d(\vec{OH} + \vec{HA})$$

or $\vec{HA}\,d\vec{OH} = 0$ d'où



$$dEp_{ie} = -m\Omega^2\,\vec{HA}\,d\vec{HA}$$

$$dEp_{ie} = d\left(-\frac{1}{2}m\Omega^2 HA^2\right) \Rightarrow Ep_{ie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 HA^2 + K$$

En $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a $HA = r$ d'où

$$Ep_{ie}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0 = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 + K$$

On trouve pour la constante K d'intégration $K = \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$

$$Ep_{ie} = \frac{1}{2}m\Omega^2\left(r^2 - HA^2\right) \qquad \text{or } HA^2 = r^2\sin^2\theta$$

$$\boxed{Ep_{ie} = \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2\cos^2\theta}$$

4. Energie potentielle totale Ep

$$Ep = Ep_p + Ep_{ie}$$

$$Ep = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2\cos^2\theta$$

$$Ep = -mgr\cos\theta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 r}{g}\cos\theta\right) \qquad \text{or } \Omega_c^2 = \frac{g}{r}$$

$$Ep = -mgr\cos\theta\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\Omega_c^2}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{Ep = -mgr\cos\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right) \quad \text{avec } \beta = \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2}}$$

5. Équation différentielle en θ

Le système m est conservatif. On a donc

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte}$$

$$\frac{dE_m}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right)\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + mgr\sin\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right) - mgr\cos\theta\,\frac{\beta}{2}\sin\theta = 0$$

or $\dfrac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}^2}{d\dot{\theta}}\,\dfrac{d\dot{\theta}}{dt}\,\dfrac{dt}{d\theta} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\dfrac{1}{\dot{\theta}} = 2\ddot{\theta}$

$$r^2\ddot{\theta} + gr\sin\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right) - gr\frac{\beta}{2}\cos\theta\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{gr}{r^2}\sin\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right) - \frac{gr}{2}\frac{\beta}{r^2}\cos\theta\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}\frac{g}{r}\beta\cos\theta\sin\theta = 0$$

On obtient en posant $\Omega_c^2 = \dfrac{g}{r}$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \Omega_c^2\sin\theta\left(1 - \beta\cos\theta\right) = 0 \quad \text{avec } \Omega_c^2 = \frac{g}{r}}$$

6. Positions d'équilibre

Si la masse m est à l'équilibre dans R' on a $\ddot{\theta} = 0$ d'où

$$\Omega_c^2 \sin\theta\left(1 - \beta\cos\theta\right) = 0$$

- $\sin\theta = 0$ est toujours solution et cela $\forall\Omega$ $\Rightarrow \theta_e = 0$, $\theta_e = \pi$
- $\cos\theta = \dfrac{1}{\beta}$ si $\beta \geq 1$ soit $\Omega > \Omega_c$ ou $\Omega > \sqrt{\dfrac{g}{r}}$

$\cos\theta = \dfrac{\Omega_c^2}{\Omega^2} = \dfrac{g}{\Omega^2 r}$ $\qquad \theta_e = \arccos\dfrac{g}{\Omega^2 r}$

7. Stabilité des positions d'équilibre

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgr\sin\theta\left(1 - \frac{\beta}{2}\cos\theta\right) - mgr\frac{\beta}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgr\sin\theta\left(1 - \beta\cos\theta\right)$$ (On retrouve l'équation de la quest 6)

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = +mgr\cos\theta\left(1 - \beta\cos\theta\right) + mgr\sin^2\theta\,\beta$$

- $\left(\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = mgr(1-\beta) > 0$ si $1-\beta > 0$ soit $\beta < 1$, $(\Omega < \Omega$

  $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si $\Omega < \Omega_c$

- $\left(\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = -mgr(1+\beta) < 0$ et cela $\forall\beta$

  $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable

- $\left(\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_e} = mgr\cos\theta_e\left(1 - \beta\cos\theta_e\right) + mgr\left(1 - \cos^2\theta_e\right)\beta$

  $= mgr\dfrac{1}{\beta}\left(1 - \beta\dfrac{1}{\beta}\right) + mgr\left(1 - \dfrac{1}{\beta^2}\right)\beta$

  $= mgr\beta\left(1 - \dfrac{1}{\beta^2}\right)$

$\left(\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_e} > 0$ si $1 - \dfrac{1}{\beta^2} > 0$ soit $\beta > 1$ soit $\Omega > \Omega_c$

$\theta = \theta_e$ est une position d'équilibre stable si $\Omega > \Omega_c$

En résumé
- $\theta = 0$ position stable si $\Omega < \Omega_c$
- $\theta = \theta_e$ position stable si $\Omega > \Omega_c$
- $\theta = \pi$ position instable

8 Graphe $\theta_e = f(\Omega)$

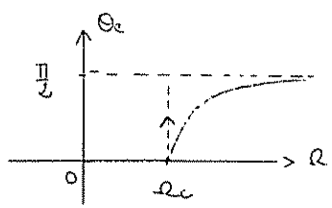
$$\cos\theta_e = \left(\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2}\right) \qquad \frac{d\cos\theta_e}{d\Omega} = \frac{d\cos\theta_e}{d\theta_e}\,\frac{d\theta_e}{d\Omega} = \frac{-2\Omega_c^2}{\Omega^3}$$

$$-\sin\theta_e \frac{d\theta_e}{d\Omega} = -2\,\frac{\Omega_c^2}{\Omega^3}$$

$$\frac{d\theta_e}{d\Omega} = +\frac{2\Omega_c^2}{\sin\theta_e\,\Omega^3}$$

$$\left(\frac{d\theta_e}{d\Omega}\right)_{\Omega=\Omega_c} = \frac{2}{\sin\theta_e\,\Omega_c} = \infty \quad \text{car } \cos\theta_e = 1$$

$$\left(\frac{d\theta_e}{d\Omega}\right)_{\Omega\gg\Omega_c} = 0$$



Cas où $\Omega = \Omega_c/\sqrt{2}$ on a alors $\Omega_c > \Omega$ d'où $\theta_e = 0$

$\Omega = \Omega_c\sqrt{2}$ on a alors $\Omega_c < \Omega$ l'angle pour lequel l'équilibre est stable est donné par

$$\cos\theta_e = \frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où } \theta_e = \frac{\pi}{3}$$