M9.13. Energie cinétique d'une masse sur un axe en rotation.

1. Energie cinétique en *Mo'*.

On se place dans le référentiel tournant *R(O, X, Y, Z)* et on y étudie le mouvement du point *M* soumis à son poids, la réaction de la tige, les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

On applique dans ce référentiel le théorème de l'énergie cinétique entre les points *Mo* et *Mo'*.

Dans ce référentiel *R* seule la force d'inertie d'entraînement travaille (le travail de celui de la force de Coriolis étant toujours nul). On a donc :

$$\frac{1}{2}mv_R^2(Mo') - \frac{1}{2}mv_R^2(Mo) = \int_{Mo}^{Mo'} \overrightarrow{F_{ie}}.d\overrightarrow{OM}$$

Dans *R*, la vitesse initiale du point *M* en *Mo*.

Comme le point coïncident à *M* est animé d'un mouvement circulaire uniforme dans *Ro* on a :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{OM} \Rightarrow$$

$$\int_{Mo}^{Mo'} \overrightarrow{F_{ie}}.d\overrightarrow{OM} = \int_{Mo}^{Mo'} m\omega^2\overrightarrow{OM}.d\overrightarrow{OM} = \int_{Mo}^{Mo'} m\omega^2 X.dX = \frac{1}{2}m\omega^2(4X_o^2 - X_o^2)$$

On obtient finalement pour l'énergie cinétique en *Mo'* :

$$\boxed{Ec(Mo') = \frac{1}{2}mv_R^2(Mo') = \frac{3}{2}m\omega^2 X_o^2}$$

2. Travail de la réaction dans *Ro*.

On applique dans *Ro* le théorème de l'énergie cinétique. Dans ce référentiel, galiléen, la masse *m* est soumise à son poids et à la réaction du support.

Dans ce référentiel la réaction n'est pas normale au vecteur déplacement (elle est contenue dans un plan perpendiculaire à la tige *OX* et sa direction n'est pas parallèle à celle de *OZ*). Le travail de la réaction n'est donc pas nul. Par contre le travail du poids est nul car cette force est contenue dans un plan perpendiculaire à la tige *OX* et sa direction est parallèle à celle de *OZ.* D'où :

$$\frac{1}{2}mv_{Ro}^2(Mo') - \frac{1}{2}mv_{Ro}^2(Mo) = W(\overrightarrow{R})$$

Or d'une manière générale en appliquant la composition des mouvements :

$$\overrightarrow{v_{Ro}}(M) = \overrightarrow{v_R}(M) + \overrightarrow{v_e}$$

Comme le point coïncident à *M* est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon *X* dans *Ro* on a :

$$\overrightarrow{v_e}(M) = X\omega\overrightarrow{e_Y}$$

et pour la vitesse en *Mo* et en *Mo'* dans *Ro* :

$$\overrightarrow{v_{Ro}}(Mo) = \overrightarrow{v_e}(Mo) = X_o\omega\overrightarrow{e_Y}$$

$$\overrightarrow{v_{Ro}}(Mo') = \overrightarrow{v_R}(Mo') + \overrightarrow{v_e}(Mo') = \overrightarrow{v_R}(Mo') + 2X_o\omega\overrightarrow{e_Y}$$

D'où :

$$\frac{1}{2}mv_{Ro}^2(Mo') = \frac{1}{2}m(\overrightarrow{v_R}(Mo') + \overrightarrow{v_e}(Mo'))^2 = \frac{7}{2}m\omega^2X_o^2$$

car $2\overrightarrow{v_R}(Mo').\overrightarrow{v_e}(Mo') = 0$ ces deux vecteurs étant orthogonaux

$$\frac{1}{2}mv_{Ro}^2(Mo) = \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}mX_o^2\omega^2$$

Le travail de la réaction de la tige s'écrit :

$W(\overrightarrow{R}) = 3m\omega^2X_o^2$ Le travail d'une force dépend du référentiel d'étude.