M9.12. Mouvement d'un anneau sur un cerceau en rotation (II).

1. Equation différentielle.

On étudie l'anneau *A* dans le référentiel *Rc* lié au cerceau.

Ce système est soumis à :

- son poids qui dérive d'une énergie potentielle de pesanteur Ep_p qui a pour expression :
  $Ep_p = -\int m\vec{g}.\vec{dl} + Cte$
  $$Ep_p = -\int m\vec{g}.\overrightarrow{dOA} + Cte = -m\vec{g}.\overrightarrow{OA} + Cte = -mgR\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) + Cte$$
  $$Ep_p = mgR\sin\Phi + Cte$$
  En prenant la référence de cette énergie potentielle dans le plan *Ox'y'*, on obtient :
  $Ep_p = mgR\sin\Phi$
- à la réaction du cerceau qui ne travaille pas dans *Rc* car elle est, dans ce référentiel, toujours normale au déplacement de l'anneau du fait de l'abscence de frottements.
- à la force d'inertie de Coriolis dont le travail est toujours nul.
- à la force d'inertie d'entraînement qui dérive d'une énergie potentielle *Ep* que l'on détermine. Comme le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotatation uniforme autour de l'axe *Oz'*, on a :
  $\overrightarrow{Fie} = m\omega^2\overrightarrow{HA}$
  avec *H* projeté de *A* sur l'axe *Oz'*.

  $$Ep = -\int \overrightarrow{Fie}.\overrightarrow{dl} + Cte$$
  $$Ep = -\int m\omega^2\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{dOA} + Cte = -\int m\omega^2\overrightarrow{HA}.d(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) + Cte$$
  $$Ep = -\int m\omega^2\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{dHA} + Cte = -\frac{1}{2}m\omega^2 HA^2 + Cte$$
  $$Ep = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2\cos^2\Phi + Cte$$

On choisit pour référence de l'énergie potentielle "centrifuge" la position de A pour la quelle l'angle polaire est nul. D'où :

$$Ep = \frac{1}{2}mR^2\omega^2(1 - \cos^2\theta) = \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\Phi$$

Comme le mouvement de l'anneau dans *Rc* est circulaire de centre *C* et de rayon *R* son énergie cinétique est :

$$Ec = \frac{1}{2}mR^2\dot{\Phi}^2$$

L'énergie mécanique de *M* se conserve dans *Rc* et vaut :

$$Em = \frac{1}{2}mR^2\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\Phi + mgR\sin\Phi$$

En dérivant cette expression par rapport au temps on obtient l'équation différentielle vérifiée par l'angle polaire :

$$\frac{dEm}{dt} = mR^2\dot{\Phi}\ddot{\Phi} + mR^2\omega^2\dot{\Phi}\sin\Phi\cos\Phi + mgR\dot{\Phi}\cos\Phi = 0$$

$$\boxed{\ddot{\Phi} + \left(\omega^2 \sin\Phi + \frac{g}{R}\right)\cos\Phi = 0}$$

2. Positions d'équilibre.

L'énergie potentielle *U* du point matériel dans *Rc* s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \sin^2\Phi + mgR\sin\Phi$$

$$U = mR^2 \sin\Phi\left(\frac{1}{2}\omega^2 \sin\Phi + \frac{g}{R}\right)$$

En dérivant par rapport à l'angle polaire :

$$\frac{dU}{d\Phi} = mR^2\cos\Phi\left(\omega^2\sin\Phi + \frac{g}{R}\right)$$

Les positions d'équilibre correspondent aux extremums de la fonction *U*. Soit :

$$\frac{dU}{d\Phi} = 0 \begin{cases} mR\cos\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \pm\frac{\pi}{2} \\ \omega^2 \sin\Phi + \frac{g}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\Phi = -\frac{g}{\omega^2 R} \Rightarrow \Phi = \arcsin\left(-\frac{g}{R\omega^2}\right) si\ \omega > \sqrt{\frac{g}{R}} \end{cases}$$

La stabilité des positions d'équilibre est liée au signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle *U* par rapport à l'angle polaire :

$$\frac{d^2U}{d\Phi^2} = mR^2\left(\omega^2\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right) - \frac{g}{R}\sin\Phi\right)$$

Pour :

- $\Phi = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{d^2U}{d\Phi^2} = -mR^2\left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right) < 0$
  Cette position est une position d'équilibre instable et cela quelque soit la vitesse angulaire.

- $\Phi = -\frac{\pi}{2} \qquad \frac{d^2U}{d\Phi^2} = mR^2\left(-\omega^2 + \frac{g}{R}\right)$
  La stabilité de cette position dépend de la vitesse angulaire.
  Pour :
  $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \frac{d^2U}{d\Phi^2} > 0 \quad \rightarrow$ stable
  $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \frac{d^2U}{d\Phi^2} < 0 \quad \rightarrow$ instable

- $\sin\Phi = -\dfrac{g}{\omega^2 R}$ $\dfrac{d^2U}{d\Phi^2} = mR^2\omega^2\left(1 - \dfrac{g^2}{R^2\omega^4}\right)$
  Pour :
  $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}} \Rightarrow \dfrac{d^2U}{d\Phi^2} > 0 \quad \rightarrow$ stable

En conclusion, suivant la valeur de la vitesse angulaire du cerceau, on a :

- $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$
  $\Phi = \dfrac{\pi}{2}$ instable
  $\Phi = -\dfrac{\pi}{2}$ instable
  $\Phi = \arcsin\left(-\dfrac{g}{\omega^2 R^2}\right)$ stable.

- $\omega < \sqrt{\dfrac{g}{R}}$
  $\Phi = \dfrac{\pi}{2}$ instable
  $\Phi = -\dfrac{\pi}{2}$ stable