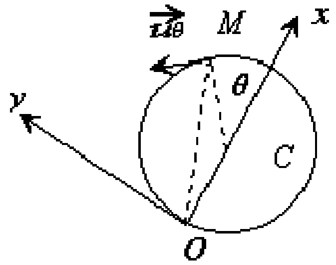
M9.11. Mouvement d'un anneau sur un cerceau en rotation.

1. Equation différentielle.

On étudie l'anneau *M* dans le référentiel *Rc* lié au cerceau.



Ce système est soumis à :

son poids qui ne travaille pas lors d'un déplacement horizontal

à la réaction du cerceau qui ne travaille pas <u>dans</u> *Rc* car elle est, dans ce référentiel, toujours normale au déplacement de l'anneau du fait de l'absence de frottements.

à la force d'inertie de Coriolis dont le travail est <u>toujours</u> nul.

à la force d'inertie d'entraînement qui dérive d'une énergie potentielle *Ep* que l'on détermine. Comme le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz, on a :

$$\overrightarrow{Fie} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$$

$$Ep = -\int \overrightarrow{Fie}.\overrightarrow{dl} + Cte$$

$$Ep = -\int m\omega^2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{dl} + Cte = -\int m\omega^2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}).\overrightarrow{dl} + Cte$$

$$Ep = -\int m\omega^2 R\,\overrightarrow{i}.Rd\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + Cte = -mR^2\omega^2\int \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)d\theta + Cte$$

$$Ep = -mR^2\omega^2\cos\theta + Cte$$

On choisit pour référence de l'énergie potentielle "centrifuge" la position de M pour la quelle l'angle polaire est nul. D'où :

$$Ep = mR^2\omega^2(1 - \cos\theta)$$

Comme le mouvement de l'anneau dans *Rc* est circulaire de centre C et de rayon R son énergie cinétique est :

$$Ec = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie mécanique de *M* se conserve dans *Rc* et vaut :

$$Em = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\omega^2\left(1 - \cos\theta\right)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps on obtient l'équation différentielle vérifiée par l'angle polaire :

$$\frac{dEm}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mR^2\omega^2\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0}$$

2. Positions d'équilibre.

On étudie la fonction énergie potentielle.

Sa dérivée première :

$$\frac{dEp}{d\theta} = mR^2\omega^2 \sin\theta$$

s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ qui constituent des positions d'équilibre.

Le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle permet de statuer sur la stabilité ou l'instabilité de ces positions d'équilibre :

$$\frac{d^2Ep}{d\theta^2} = mR^2\omega^2 \cos\theta$$

$\left(\frac{d^2Ep}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta=0$ position d'équilibre stable.

$\left(\frac{d^2Ep}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi} < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta=\pi$ position d'équilibre instable.