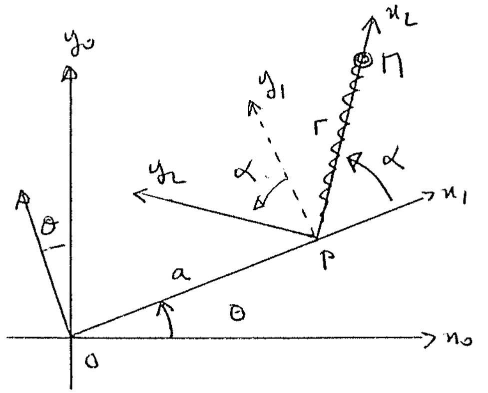
MS_10_

Etude d'un équilibre relatif.



R_1 est en rotation uniforme par rapport à R_0
$\vec{\omega}_{R_1/R_0} = \omega \vec{e}_z = \dot{\theta}\vec{e}_{z_0}$
R_2 est en rotation uniforme par rapport à R_1
$\vec{\omega}_{R_2/R_1} = \dot{\alpha}\vec{e}_{z_0}$

1. Vitesse $\vec{V}_{M/R_0}$

On applique la composition des vitesses

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{M/R_1} + \vec{V}_{e_1} = (\dot{r}\vec{e}_{x_2} + r\dot{\alpha}\vec{e}_{y_2}) + \vec{V}_e$$

Le point coïncident à M décrit dans R_0 un cercle de rayon OM à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ d'où

$$\vec{V}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \vec{\omega}\wedge(\vec{OP}+\vec{PM}) = \omega a\vec{e}_{y_1} + \omega r\vec{e}_{y_2}$$

or $\vec{e}_{y_1} = \sin\alpha\,\vec{e}_{x_2} + \cos\alpha\,\vec{e}_{y_2}$.

On obtient :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \dot{r}\vec{e}_{x_2} + r\dot{\alpha}\vec{e}_{y_2} + \omega a(\sin\alpha\,\vec{e}_{x_2} + \cos\alpha\,\vec{e}_{y_2}) + \omega r\vec{e}_{y_2}$$

$$\vec{V}_{M/R} = (\dot{r} + \omega a\sin\alpha)\vec{e}_{x_2} + (r\dot{\alpha} + \omega(a\cos\alpha + r))\vec{e}_{y_2}$$

2 - Accélération $\vec{\Gamma}(M/R_0)$

On applique la composition des accélérations

$$\vec{A}_{M/R_0} = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

- $\vec{a}(M/R_1) = \dfrac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_{x_2} + \dot{r}\dot{\alpha}\vec{e}_{y_2} - r\dot{\alpha}^2\vec{e}_{x_2} + (\dot{r}\dot{\alpha} + r\ddot{\alpha})\vec{e}_{y_2}$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2)\vec{e}_{x_2} + (2\dot{r}\dot{\alpha} + r\ddot{\alpha})\vec{e}_{y_2}$$

- $\vec{a}_e = -\omega^2\vec{OM} = -\omega^2(\vec{OP}+\vec{PM}) = -\omega^2 a\vec{e}_{x_1} - \omega^2 r\vec{e}_{x_2}$

or $\vec{e}_{x_1} = \cos\alpha\,\vec{e}_{x_2} - \sin\alpha\,\vec{e}_{y_2}$

d'où

$$\vec{a}_e = -\omega^2(a\cos\alpha + r)\vec{e}_{x_2} + \omega^2 a\sin\alpha\,\vec{e}_{y_2}$$

- $\vec{a}_c = +2\vec{\omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{V}_{M/R_1} = +2\omega\vec{e}_z\wedge(\dot{r}\vec{e}_{x_2} + r\dot{\alpha}\vec{e}_{y_2})$

$$\vec{a}_c = +2\omega\dot{r}\vec{e}_{y_2} - 2\omega r\dot{\alpha}\vec{e}_{x_2}$$

Finalement

$$\vec{\Gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 - \omega^2(a\cos\alpha + r) - 2\omega r\dot{\alpha})\vec{e}_{x_2} + (2\dot{r}\dot{\alpha} + r\ddot{\alpha} + \omega^2 a\sin\alpha + 2\omega\dot{r})\vec{e}_{y_2}$$

3. Relation de la dynamique

La seule force prise en compte dans le référentiel R_0 est la tension $\vec{T} = -kr\vec{e}_{x_2}$. On a alors

$$m\vec{\Gamma}(M/R_0) = \vec{T} = -kr\vec{e}_{x_2}$$

4. Equations du mouvement.

On les obtient par la projection de la relation précédente dans la base $(\vec{e_{r_2}}, \vec{e_{y_2}})$. Soit

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 - \omega^2(a\cos\alpha + r) - 2\omega r\dot{\alpha}\right) = -kr \\ 2\dot{r}\dot{\alpha} + r\ddot{\alpha} + \omega^2 a\sin\alpha + 2\omega\dot{r} = 0 \end{cases}$$

5. Equilibres relatifs.

Dans ce cas on a $r = \text{cte}$ et $\alpha = \text{cte}$ d'où

$\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$, $\ddot{\alpha} = 0$

le système d'équations s'écrit donc :

$$\begin{cases} m\left(-\omega^2(a\cos\alpha + r)\right) = -kr & (1) \\ \omega^2 a\sin\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = \pi$.

$(1) \Rightarrow r = \dfrac{m\omega^2 a\cos\alpha}{k - m\omega^2}$ avec $k \neq m\omega^2$.

pour α_1 $\quad r_1 = \dfrac{m\omega^2 a}{k - m\omega^2}$ si $k > m\omega^2$.

α_2 $\quad r_2 = \dfrac{m\omega^2 a}{m\omega^2 - k}$ si $k < m\omega^2$.