M9.1. Période du pendule simple dans un ascenseur.

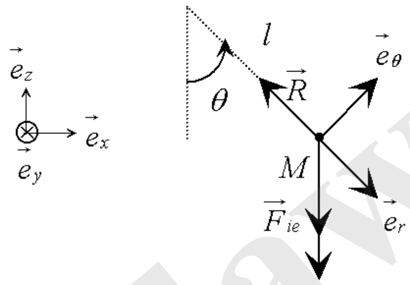
1. Equation différentielle. Théorème du moment cinétique.

On étudie dans le référentiel de l'ascenseur le point *M*. Le référentiel choisi n'est pas galiléen car il est animé d'un mouvement de translation *non uniforme* par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen dans le cadre de cet exercice.

Le bilan des forces agissant sur *M* est le suivant :

$\vec{P} = m\vec{g}$	poids de *M*
$\vec{T}$	tension du fil
$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$	force d'inertie d'entraînement

La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel d'étude choisi n'est pas en rotation par rapport au référentiel terrestre.



On exprime les différentes forces agissant sur *M* en utilisant la base cylindro-polaire et le vecteur $\vec{e}_z$ de la base lié au référentiel terrestre.

Ici $\vec{e}_z$ n'est pas le troisième vecteur de la base cylindro-polaire, mais en fait -$\vec{e}_y$ en s'adaptant aux notations proposées.

$$\vec{P} = -mg\vec{e}_z$$
$$\vec{T} = -T\vec{e}_r$$
$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(M_c/\Re)$$

Le point M_c est le point coïncident à *M*, c'est-à-dire le point fixe du référentiel $\Re'$ qui a la date considérée de l'étude à la même position dans ce référentiel $\Re'$ que le point *M*. L'accélération d'entraînement est l'accélération de ce point coïncident déterminée dans le référentiel $\Re$.

Comme le référentiel de l'ascenseur $\Re'$ est en translation par rapport à $\Re$, tous les points fixes de $\Re'$ ont même vecteur accélération par rapport à $\Re$: en particulier celle de son origine *O'*. On obtient donc :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(M_c/\Re) = -m\vec{a}(O'/\Re)$$
$$\vec{F}_{ie} = -m\ddot{z}\vec{e}_z$$

On écrit le théorème du moment cinétique en *A* :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(M/\Re')}{dt}\right)_{\Re'} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{Fie})$$

On exprime les moments des forces en A :

$$\vec{\mathrm{M}}_A\left(\vec{P}\right) = +mgl\sin\theta\vec{e}_y$$
$$\vec{\mathrm{M}}_A\left(\vec{T}\right) = \vec{0}$$
$$\vec{\mathrm{M}}_A\left(\vec{F}_{ie}\right) = +m\ddot{z}l\sin\theta\vec{e}_y$$

Dans le référentiel de l'ascenseur, le moment cinétique en A du point M s'écrit :

$$\vec{L}_A\left(M/\Re'\right) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}\left(M/\Re'\right)$$
$$\vec{L}_A\left(M/\Re'\right) = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -ml^2\dot{\theta}\vec{e}_y$$

La dérivée ce moment cinétique s'écrit dans $\Re'$:

$$\left(\frac{d\vec{L}_A\left(M/\Re'\right)}{dt}\right)_{\Re'} = -ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_y$$

La projection du théorème du moment cinétique suivant le vecteur $\vec{e}_y$ donne :

$$m\ddot{z}l\sin\theta + mgl\sin\theta = -ml^2\ddot{\theta}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle du mouvement de M dans le référentiel de l'ascenseur que l'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\ddot{z}+g}{l}\right)\sin\theta = 0$$

2. Equation différentielle. Relation de la dynamique.

Dans le référentiel de l'ascenseur le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a}\left(M/\Re'\right) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie}$$

On étudie la projection de cette équation suivant le vecteur orthoradial afin d'éliminer l'inconnue qu'est la tension du fil. On obtient ainsi :

$$ml\ddot{\theta} = -m\ddot{z}\sin\theta - mg\sin\theta$$

Et après simplification :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\ddot{z}+g}{l}\right)\sin\theta = 0$$

3. Période.

Dans le cas de faibles oscillations du système on peut poser que : $\sin\theta \approx \theta$. On obtient ainsi l'équation différentielle qui définit un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\ddot{z}+g}{l}\right)\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$$

La pulsation des oscillations du système est alors : $\omega_o = \sqrt{\dfrac{\ddot{z} + g}{l}}$ et la période recherchée des oscillations :

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\ddot{z} + g}}$$

Dans le cas où l'ascenseur est en chute libre on a : $\ddot{z} = -g$. La période des oscillations devient alors infinie : la masse *M* met alors un temps infini pour effectuer une oscillation, autant dire alors qu'elle n'effectue pas d'oscillation et qu'ainsi elle ne bouge pas dans le référentiel de l'ascenseur (du fait des conditions initiales que l'on suppose). On dit alors que le point *M* est en *impesanteur* dans le référentiel de l'ascenseur.