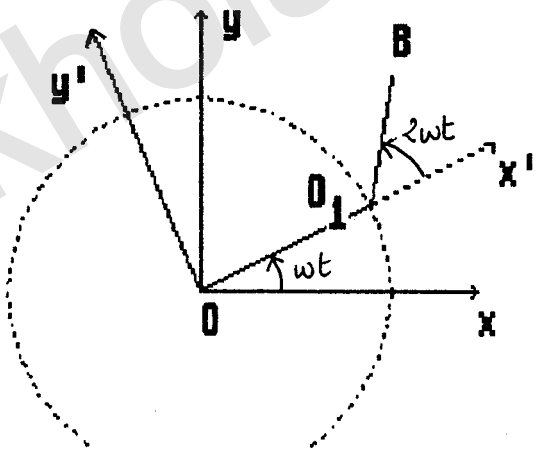
M8.7. Système bielle-biellette.

Enoncé.

Une bielle OO_1, de longueur l, tourne uniformément autour d'un axe Oz avec une vitesse angulaire ω par rapport au référentiel $R = Oxyz$. Une biellette O_1B de longueur moitié tourne dans le même plan que la bielle. Son mouvement est tel que $\left(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{O_1B}\right) = 2\left(\vec{u}_x, \overrightarrow{OO_1}\right)$ à chaque instant. Initialement les points O, O_1 et B sont alignés sur l'axe Ox.

1. Exprimer en fonction du temps le s composantes de $\overrightarrow{OO_1}$ et de $\overrightarrow{O_1B}$ dans la base de $R' = Ox'y'z$.
2. Trouver la vitesse $\vec{v}_{B/R'}$ dans la base de R'.
   Dans cette même base, écrire la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ de B dans le mouvement de R' par rapport à R.
   En déduire $\vec{v}_{B/R}$ projeté dans R'.



M8.7. Système bielle-biellette.
Corrigé.

1. Expression des vecteurs positions.

Dans la base du référentiel *R'* les différents vecteurs position ont pour expression :

$$\overrightarrow{OO_1} = l\vec{u}_{x'}$$

$$\overrightarrow{O_1B} = \frac{l}{2}\cos(2\omega t)\vec{u}_{x'} + \frac{l}{2}\sin(2\omega t)\vec{u}_{y'} = \frac{l}{2}\left(\cos(2\omega t)\vec{u}_{x'} + \sin(2\omega t)\vec{u}_{y'}\right)$$

2. Expression des vecteurs vitesse.

On applique la définition du vecteur vitesse dans le référentiel *R'* où les vecteurs $\left(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}\right)$ sont fixes.

$$\vec{v}_{B/R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_1B}}{dt}\right)_{R'} = \vec{0} + \frac{l}{2}\left(-2\omega\sin(2\omega t)\vec{u}_{x'} + 2\omega\cos(2\omega t)\vec{u}_{y'}\right)$$

Car : $\left(\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\right)_{R'} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{B/R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_1B}}{dt}\right)_{R'} = \vec{0} + \frac{l}{2}\left(-2\omega\sin(2\omega t)\vec{u}_{x'} + 2\omega\cos(2\omega t)\vec{u}_{y'}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_{B/R'} = l\omega\left(-\sin(2\omega t)\vec{u}_{x'} + \cos(2\omega t)\vec{u}_{y'}\right)}$$

La vitesse d'entraînement est la vitesse d'un point fixe de *R'* qui coïncide à la date considérée avec le point étudié, ici le point *B*, et qui est déterminée dans le référentiel *R*.
Ce point fixe de *R'* est animé dans *R* d'un mouvement circulaire uniforme de rayon OB à la vitesse angulaire ω.

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{\omega}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \overrightarrow{OB}\begin{vmatrix} l + \frac{l}{2}\cos(2\omega t) \\ \frac{l}{2}\sin(2\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \omega l\left(-\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\vec{u}_{x'} + \left(1 + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right)\vec{u}_{y'}\right)}$$

La vitesse du point *B* dans le référentiel *R* exprimée dans la <u>base</u> de *R'* a pour expression :

$$\vec{v}_{B/R} = \vec{v}_e + \vec{v}_{B/R'}$$

$$\boxed{\vec{v}_{B/R'} = \omega l\left(-\frac{3}{2}\sin(2\omega t)\vec{u}_{x'} + \left(1 + \frac{3}{2}\cos(2\omega t)\right)\vec{u}_{y'}\right)}$$