M8.6. Mouvement sinusoïdal d'un point sur une tige en rotation autour d'un axe fixe.

1. Vitesse du point M dans *R*.

Pour déterminer l'expression de cette vitesse, on utilise la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_e$$

R′ désigne le référentiel lié au triangle AOB et animé de rotation uniforme autour de l'axe O*z*. La vitesse d'entraînement est la vitesse d'un point fixe *M′* de *R′* coïncident avec le point M à la date *t* et que l'on évalue ici dans le référentiel *R*. Le point M′ décrit un cercle de rayon *r* :

$$r = b(1 + \sin \omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = b(1 + \sin \omega t) \cos \theta$$

Dans la base de *R*', la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{v}_e = b(1 + \sin \omega t)\dot{\Psi} \cos \theta \overrightarrow{e_{y'}} = 2ktb(1 + \sin \omega t) \cos \theta \overrightarrow{e_{y'}}$$

Dans le référentiel *R′*, le point M est animé d'un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal. On a :

$$\vec{v}_{M/R'} = b\omega \cos \omega t \, \vec{u}$$

Dans la base de *R′*, le vecteur unitaire $\vec{u}$ s'écrit :

$$\vec{u} = \cos \theta \overrightarrow{e_{x'}} - \sin \theta \overrightarrow{e_{z'}}$$

Finalement la vitesse du point M s'écrit :

$$\boxed{\vec{v}_{M/R} = b\omega \cos \omega t \cos \theta \overrightarrow{e_{x'}} + 2ktb(1 + \sin \omega t) \cos \theta \overrightarrow{e_{y'}} - b\omega \cos \omega t \sin \theta \overrightarrow{e_{z'}}}$$

2. Accélération du point M dans *R*.

Pour déterminer l'accélération de A dans le référentiel *R*, on peut utiliser la loi de composition des accélérations en faisant intervenir le référentiel *R′*.

Afin de montrer différentes techniques de calcul, la méthode employée dans cette seconde partie est celle du calcul direct de l'accélération du point M par dérivation du vecteur vitesse. Il interviendra dans le calcul les dérivées suivantes :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right)_R = \dot{\Psi}\overrightarrow{e_{y'}} = 2kt\overrightarrow{e_{y'}} \qquad \left(\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right)_R = -\dot{\Psi}\overrightarrow{e_{y'}} = -2kt\overrightarrow{e_{x'}} \qquad \left(\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)_R = \vec{0}$$

Le calcul conduit à :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_{M/R} = {} & (-b\omega^2 \sin \omega t \cos \theta - 4k^2t^2b(1 + \sin \omega t) \cos \theta)\overrightarrow{e_{x'}} + \\ & (2kb(1 + \sin \omega t) \cos \theta + 4ktb\omega \cos \omega t \cos \theta)\overrightarrow{e_{y'}} + b\omega^2 \cos \omega t \sin \theta \overrightarrow{e_{z'}}\end{aligned}}$$