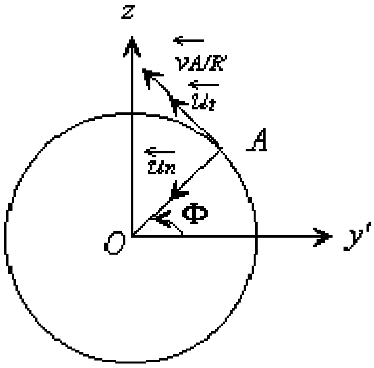
M8.5. Mouvement d'un point sur le bord d'un cerceau en rotation.

1. Vitesse et accélération de *A* dans *R'*.

Dans le référentiel *R'*, le point *A* est animé d'un mouvement circulaire de centre *O* et de rayon *R*. La vitesse angulaire du référentiel lié à *A* est par rapport à *R'* est la dérivée par rapport au temps de l'angle Φ. On a donc, dans la base cylindro-polaire :



$$\begin{cases} \vec{v}_{A/R'} = R\dot{\Phi}\vec{u}_\theta \\ \vec{a}_{A/R'} = -R\dot{\Phi}^2\vec{u}_r + R\ddot{\Phi}\vec{u}_\theta \end{cases}$$

2. Vitesse et accélération d'entraînement, accélération de Coriolis.

La vitesse d'entraînement est la vitesse d'un point fixe *A'* de *R'* coïncidant avec le point *A* à la date *t* et que l'on évalue ici dans le référentiel terrestre R_T. Le point *A'* décrit un cercle de rayon $R\cos\Phi$ à la vitesse angulaire ω. La vitesse d'entraînement a donc pour expression :

$$\vec{v}_e = -R\omega\cos\Phi\,\vec{e}_{x'}$$

L'accélération d'entraînement est l'accélération d'un point fixe de *R'* coïncident avec le point *A* à la date *t* et que l'on évalue dans le référentiel R_T. Le point coïncident décrit un cercle de rayon $R\cos\Phi$ à la vitesse angulaire constante ω. Le point coïncident est donc animé d'un mouvement circulaire et uniforme. Son accélération est donc axipète.

Soit *H* le projeté de *A* sur l'axe *Oz*. L'accélération d'entraînement a donc pour expression :

$$\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HA} = -R\omega^2\cos\Phi\,\vec{e}_{y'}$$

Pour déterminer l'accélération de Coriolis dans la base demandée, il faut projeter le vecteur vitesse du point *A* évalué dans *R'*, dans la base de *R'*.

D'où :

$$\vec{v}_{A/R'} = -R\dot{\Phi}\sin\Phi\,\vec{e}_{y'} + R\dot{\Phi}\cos\Phi\,\vec{e}_z$$

Pour l'accélération de Coriolis on obtient :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{A/R'} = 2\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R\dot{\Phi}\sin\Phi \\ R\dot{\Phi}\cos\Phi \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_c = 2R\omega\dot{\Phi}\sin\Phi\,\vec{e}_{x'}$$

3. Vitesse et accélération de *A* dans le référentiel terrestre.

On applique la loi de composition des vitesses et des accélérations :

- Pour la vitesse.

$$\vec{v}_{A/R_T} = \vec{v}_{A/R'} + \vec{v}_e$$

$$\boxed{\vec{v}_{A/R_T} = -R\omega\cos\Phi\,\vec{e}_{x'} - R\dot{\Phi}\sin\Phi\,\vec{e}_{y'} + R\dot{\Phi}\cos\Phi\,\vec{e}_z}$$

- Pour l'accélération :

$$\overrightarrow{a}_{A/R_T} = \overrightarrow{a}_{A/R'} + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c$$

$$\overrightarrow{a}_{A/R_T} = \overrightarrow{a}_{A/R'} - R\omega^2 \cos\Phi \overrightarrow{e}_{y'} + 2R\omega\dot{\Phi}\sin\Phi\overrightarrow{e}_{x'}$$

Il faut exprimer l'accélération de *A* dans *R'* dans la base de *R'* :

$$\overrightarrow{a}_{A/R'} = -\left(R\ddot{\Phi}\sin\Phi + R\dot{\Phi}^2\cos\Phi\right)\overrightarrow{e}_{y'} + \left(R\ddot{\Phi}\cos\Phi - R\dot{\Phi}^2\sin\Phi\right)\overrightarrow{e}_z$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{a}_{A/R_T} &= 2R\omega\dot{\Phi}\sin\Phi\overrightarrow{e}_{x'} - \left(R\ddot{\Phi}\sin\Phi + R\dot{\Phi}^2\cos\Phi + R\omega^2\cos\Phi\right)\overrightarrow{e}_{y'}\\ &+ \left(R\ddot{\Phi}\cos\Phi - R\dot{\Phi}^2\sin\Phi\right)\overrightarrow{e}_z\end{aligned}}$$