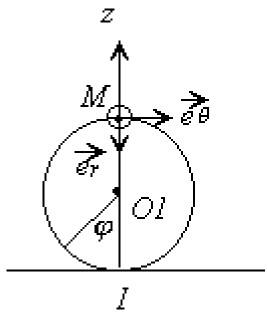
M8.4. Rotation d'une roue autour d'un axe fixe.

1. Condition de roulement sans glissement.
Soit *I* le point appartenant à la roue et en contact avec le sol. S'il n'y a pas de glissement la vitesse de ce point par rapport au référentiel $\Re_T$ lié au sol est nulle.
On exprime cette vitesse en faisant intervenir le référentiel $\Re'$ lié à la tige *OO*1 et en rotation uniforme autour de l'axe *Oz* :

$$\vec{v}_{I/R_T} = \vec{v}_{I/R'} + \vec{v}_e = \vec{0}$$



La vitesse d'entraînement est la vitesse d'un point fixe *I'* de $\Re'$ coïncident avec le point *I* à la date *t* et que l'on évalue dans le référentiel $\Re_T$. Le point *I'* décrit un cercle de rayon *R* à la vitesse angulaire ω. La vitesse d'entraînement a donc pour expression :

$$\vec{v}_e = R\omega\,\vec{e}_\theta$$

Dans le référentiel $\Re'$ le point *I* décrit un cercle de rayon *a* à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Soit :

$$\vec{v}_{I/R'} = -a\dot{\varphi}\,\vec{e}_\theta$$

La condition de roulement sans glissement est donc :

$$\boxed{a\dot{\varphi} = R\dot{\theta}}$$

2. Vitesse et accélération de M par rapport au sol.
On utilise pour déterminer ces deux grandeurs les formules de composition :
Pour la vitesse.

$$\vec{v}_{M/R_T} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_e$$

La vitesse d'entraînement du point *M* est identique à celle du point *I*.

$$\vec{v}_e = R\omega\,\vec{e}_\theta$$

Dans le référentiel $\Re'$ le point *M* décrit un cercle de rayon *a* à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Soit :

$$\vec{v}_{M/R'} = +a\dot{\varphi}\,\vec{e}_\theta$$

En écrivant la condition de roulement sans glissement on obtient :

$$\boxed{\vec{v}_{M/R_T} = 2R\omega\,\vec{e}_\theta}$$

Pour l'accélération.

$$\vec{a}_{M/R_T} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'accélération d'entraînement est l'accélération d'un point fixe de $\Re'$ coïncident avec le point *M* à la date *t* et que l'on évalue dans le référentiel $\Re_T$ Le point coïncident décrit un cercle de rayon *R* à la vitesse angulaire ω. L'accélération d'entraînement à donc pour expression :

$$\vec{a}_e = -R\omega^2\,\vec{e}_r$$

Dans le référentiel $\Re'$ le point M décrit un cercle de rayon a à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Soit :

$$\overrightarrow{a}_{M/R'} = -a\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_z} = -\frac{R^2}{a}\omega^2\overrightarrow{e}_z$$

Pour l'accélération de Coriolis, en utilisant la condition de roulement sans glissement :

$$\overrightarrow{a}_c = 2\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}_{M/R'} = 2\omega\overrightarrow{e}_z \wedge a\dot{\varphi}\overrightarrow{e}_\theta = -2R\omega^2\overrightarrow{e}_r$$

On obtient pour expression de l'accélération :

$$\overrightarrow{a}_{M/R_T} = \overrightarrow{a}_{M/R'} + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c = -\frac{R^2}{a}\omega^2\overrightarrow{e}_z - R\omega^2\overrightarrow{e_r} - 2R\omega^2\overrightarrow{e}_r$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{M/R_T} = -3R\omega^2\overrightarrow{e_r} - \frac{R^2}{a}\omega^2\overrightarrow{e}_z}$$

On obtient pour la norme de ces vecteurs :

$$\boxed{\begin{gathered} v_{M/R_T} = 2R\omega \\ a_{M/R_T} = R\omega^2\sqrt{9 + \left(\frac{R}{a}\right)^2} \end{gathered}}$$