M8.1. Etude du mouvement d'une balle dans un référentiel tournant.

1. Coordonnées.
La trajectoire de la balle M est contenue dans le plan horizontal $z = 0$. On a :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} = x'\,\overrightarrow{i'} + y'\,\overrightarrow{j'}$$

On exprime les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i'}$ et $\overrightarrow{j'}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{i} = \cos\theta\,\overrightarrow{i'} - \sin\theta\,\overrightarrow{j'} \\ \overrightarrow{j} = \sin\theta\,\overrightarrow{i'} + \cos\theta\,\overrightarrow{j'} \end{cases}$$

En remplaçant et par identification, on détermine :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

2. Trajectoire.
Dans le référentiel lié au sol on a :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = v_o t \end{cases}$$

le mouvement étant rectiligne uniforme.

Le mouvement de la balle, par rapport au référentiel lié au plateau et de repère
(O,*x'*, *y'*) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = v_o t\sin\omega t \\ y' = v_o t\cos\omega t \end{cases}$$

En établissant un tableau de valeur pour *x'*, *y'* pour différentes valeurs de ω*t*, et en traçant
y' =f(x'), on montre que la trajectoire est une spirale.

3. Vitesse et accélération.
Dans le référentiel lié au plateau :

$$\overrightarrow{v}\begin{cases} \dot{x}' = v_o(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t) \\ \dot{y}' = v_o(\cos\omega t - \omega t\sin\omega t) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{a}\begin{cases} \ddot{x}' = v_o\omega(2\cos\omega t - \omega t\sin\omega t) \\ \ddot{y}' = -v_o\omega(2\sin\omega t + \omega t\cos\omega t) \end{cases}$$

4. Lois de composition.

- Pour la vitesse :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \overrightarrow{v}_{M/R'} + \overrightarrow{v_e}$$

Le point fixe de *R'* qui coïncide avec le point système M étudié est animé d'un mouvement circulaire uniforme par rapport au référentiel *R*. La vitesse d'entraînement s'écrit alors dans la base de *R'* :

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{cases} -\omega y' \\ \omega x' \end{cases}$$

La loi de composition exprimée dans la base de *R'* s'écrit :

$$\begin{cases} v_o\sin\omega t = \dot{x}' - \omega y' = \dot{x}' - \omega v_o t\cos\omega t \\ v_o\cos\omega t = \dot{y}' + \omega x' = \dot{y}' + \omega v_o t\sin\omega t \end{cases}$$

D'où :

$$\vec{v}\begin{cases} \dot{x}' = v_0(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t) \\ \dot{y}' = v_0(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t) \end{cases}$$

- Pour l'accélération :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'accélération du point M dans *R* est nulle car le mouvement y est rectiligne uniforme.
Le point coïncident est animé d'un mouvement circulaire et uniforme dans *R*, d'où :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$$

L'accélération de Coriolis a pour expression :

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

En exprimant la loi de composition dans la base de *R'*, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x}' = \omega(\omega x' + 2\dot{y}') \\ \ddot{y}' = \omega(\omega y' - 2\dot{x}') \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\vec{a}\begin{cases} \ddot{x}' = v_0\omega(2\cos \omega t - \omega t \sin \omega t) \\ \ddot{y}' = -v_0\omega(2\sin \omega t + \omega t \cos \omega t) \end{cases}$$