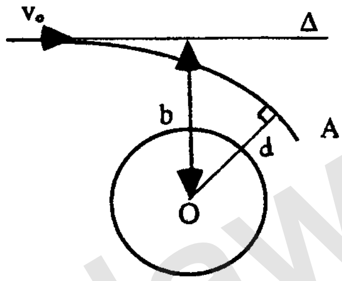
M7.3. Chute d'un météorite.

Enoncé.

Un météorite, de masse m, a, très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_o$ de module v_o portée par une droite Δ située à une distance b du centre O de la Terre. On suppose que le météorite est soumis uniquement au champ gravitationnel terrestre et qu'il n'y a jamais de forces de frottement. Soit A le point de la trajectoire tel que la distance Terre-météorite soit minimale. On note $OA = d$. On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel galiléen.



On veut déterminer à partir de quelle valeur de b le météorite s'écrasera sur la Terre.
On notera G la constante de gravitation, M la masse de la Terre, supposée sphérique, homogène, de masse volumique ρ, de rayon R.

1. Donner l'expression de la force de gravitation en un point P de la trajectoire tel que $OP = r$. Calculer l'énergie potentielle $Ep(r)$ du météorite en ce point. On prendra $Ep(\infty) = 0$.

2. Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours du mouvement? On donnera une justification. En déduire que la trajectoire est plane.

3. Donner l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Montrer qu'en A, point de la trajectoire le plus proche de O, la vitesse $\vec{v}_1$ (de norme v_1) est orthogonale à $\overrightarrow{OA}$.

4. En explicitant la question 2), trouver deux relations liant b, d, G, M, v_o, v_1.

En déduire l'expression de d en fonction de G, M, b, v_o.

Soit R le rayon de la Terre. Quelle condition doit satisfaire b pour que le météorite de vitesse initiale v_o rencontre la Terre ?

M7.3. Chute d’un météorite.
Corrigé.

1. Force. Energie potentielle.

La force de gravitation s’exerçant sur le météorite en un point P de sa trajectoire a pour expression :

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{OP^2}\vec{u}_{OP} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$$

<u>Remarque</u> : Dans cette expression de la force de gravitation le vecteur $\vec{u}_r$ est *a priori* celui de la base sphérique et non celui de la base cylindro-polaire car on ne sait si le mouvement du météorite est plan ou pas.

Si la force de gravitation dérive d’une énergie potentielle son travail élémentaire doit être égale à l’opposé de la différentielle d’une fonction appelée énergie potentielle (ce qui revient à dire que le travail de cette force entre deux points donnés de l’espace ne dépend pas du chemin suivi par le point P entre ces deux points) :

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dOP} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r.d\left(r\vec{u}_r\right)$$
$$\delta W = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r.\left(dr\vec{u}_r + rd\vec{u}_r\right)$$
$$\delta W = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r.dr\vec{u}_r - G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r.rd\vec{u}_r$$

Comme le vecteur $\vec{u}_r$ est unitaire, le produit scalaire $\vec{u}_r.d\vec{u}_r$ est nul. On a ainsi :

$$\delta W = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r.dr\vec{u}_r = -G\frac{Mm}{r^2}dr = d\left(\frac{GMm}{r}\right)$$

On peut donc écrire le travail élémentaire de la force de gravitation sous la forme :

$$\delta W = d\left(\frac{GMm}{r}\right) = -dE_P$$
$$dE_P = -d\left(\frac{GMm}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad E_P = -\frac{GMm}{r} + Cste$$

Si l’on prend $E_P\left(r \to \infty\right) = 0$ on a alors $Cste = 0$. On obtient :

$$\boxed{E_P = -\frac{GMm}{r}}$$

2. Grandeurs conservées.

Le météorite n’étant soumis qu’à la force gravitationnelle qui est conservative (car dérivant d’une énergie potentielle), il y a conservation de son énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = Cte$$

Comme le champ de force est central, le moment cinétique se conserve au cours du temps, en effet :

$$\vec{L_O} = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OP} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{OP} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{r\vec{u}_r \wedge \left(-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r\right) = \vec{0}} = \vec{0}$$

Le vecteur moment cinétique st donc une constante vectorielle du mouvement $\vec{L_O} = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$

Ce vecteur garde une direction fixe dans l'espace au cours du temps et donc au cours du mouvement du météorite. Or le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ du météorite est orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L_O}$, il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est donc toujours contenu dans un plan orthogonal à $\vec{L_O}$: le mouvement du météorite est donc plan défini par le point *O* et le vecteur vitesse initial $\vec{v_o}$.

On peut donc maintenant poser que le vecteur $\vec{u_r}$ introduit à la première question est celui de la base cylindro-polaire.

3. Orthogonalité.

Comme le mouvement du point étudié est plan on peut écrire en coordonnées polaires que :

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{u_r} \qquad ; \qquad \vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Au point *A*, *r* est minimum donc $\dot{r} = 0$ d'où :

$$\vec{v}(A) = \vec{v_1} = OA\dot{\theta}\vec{u_\theta} = d\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v_1}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u_\theta}$ et donc orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OA} = d\vec{u_{r1}}$

4. Relations.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire que :

$$E_m(\infty) = E_m(A)$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{d}$$

$$\boxed{v_o^2 = v_1^2 - 2\frac{GMm}{d}} \qquad (1)$$

On utilise maintenant la conservation du moment cinétique :

$$\vec{L_O}(\infty) = \vec{L_O}(A)$$

$$\overrightarrow{OP_\infty} \wedge m\vec{v_o} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v_1}$$

Soit *H* le projeté orthogonal de *O* sur Δ :

$\overrightarrow{OP_\infty} \wedge m\vec{v_o} = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP_\infty}\right) \wedge m\vec{v_o} = \overrightarrow{OH} \wedge m\vec{v_o}$ car les vecteurs $\overrightarrow{HP_\infty}$ et $\vec{v_o}$ sont colinéaires.

Comme $\overrightarrow{OH} \perp \vec{v_O}$ et $\overrightarrow{OA} \perp \vec{v_1}$ on obtient :

$$\boxed{bv_o = dv_1} \qquad (2)$$

5. **Expression de *D*.**

De l'équation (2) on tire que $v_1 = \frac{b}{d} v_o$.

On introduit cette expression de la vitesse v_1 dans l'équation (1) :

$$v_o^2 = v_o^2 \frac{b^2}{d^2} - 2\frac{GMm}{d}$$

On obtient ainsi une équation du second degré en *d* :

$$d^2 + 2\frac{GMm}{v_o^2} d - b^2 = 0$$

On ne conserve que la racine positive de cette équation :

$$d = -\frac{GM}{v_o^2} + \left(\left(\frac{GM}{v_o^2}\right)^2 + b^2\right)^{1/2}$$

$$d = \frac{GM}{v_o^2}\left(\left(1 + \left(\frac{bv_o^2}{GM}\right)^2\right)^{1/2} - 1\right)$$

6. Condition sur *b*.

Le météorite rencontre la Terre lorsque $r \leq R$ or $r_{\min} = d$. Il y a donc rencontre si :

$$d \leq R$$

En reprenant l'équation du second degré portant sur *d* on dans le cas où $d \leq R$:

$$R^2 + 2\frac{GMm}{v_o^2} R \geq b^2$$

$$\boxed{b \leq R\left(1 + 2\frac{GM}{v_o^2 R}\right)^{1/2}}$$

Dans le cas où $v_o = 11\ \mathrm{km.s^{-1}}$ on obtient pour $b = 9,09.10^6\,\mathrm{m} = 1,43R$