M7.2. Mouvement hyperbolique d'un satellite artificiel.

1. Vitesse et énergie mécanique.

On étudie le satellite dans le référentiel géocentrique que l'on pose galiléen.

Dans ce référentiel, le satellite est soumis à la force de gravitation d'expression :

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$$ avec $r = OA$ et $\vec{u}_r$ vecteur de la base polaire car le mouvement est plan

La seconde loi de la dynamique permet d'écrire que :

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = m\vec{a} = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\right)$$

Comme le mouvement est circulaire on a $r = r_o = cte \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, d'où :

$$-G\frac{Mm}{{r_o}^2}\vec{u}_r = m\left(-r_o\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r_o\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\right)$$

On obtient par projection et simplification par m :

$$\begin{cases} \dfrac{GM}{{r_o}^2} = r_o\dot{\theta}^2 & (1) \\ 0 = r_o\ddot{\theta} & (2) \end{cases}$$

La deuxième équation de ce système permet d'affirmer que le mouvement est uniforme :
$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cste$.

Le satellite est donc animé d'un mouvement circulaire uniforme à la vitesse $v_o = r_o\dot{\theta}$.
Grace à cette expression de la vitesse, l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{GM}{{r_o}^2} = r_o\frac{v_o^2}{r_o^2}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r_o}}$$

$$v_o = 7{,}8\ \text{km.s}^{-1}$$

La force gravitationnelle est conservative et dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$ la référence étant prise à l'infini de la Terre

L'énergie mécanique du satellite à la distance r_o s'écrit :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{r_o} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_o} - \frac{GMm}{r_o}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_o} = -E_c$$

$$E_m = -6{,}0.10^{10}\ \text{J}$$

Le satellite en orbite circulaire est dans un état lié, il est donc normal de trouver une énergie mécanique négative.

2. Trajectoire et nouvelle énergie mécanique.

On considère le satellite en un point quelconque *M'* de sa trajectoire après lui avoir communiqué un excédent de vitesse en un point *M* de sa trajectoire circulaire. Soit $\vec{v}\,'$ sa vitesse en ce point.

Le moment cinétique du satellite en ce point a pour expression par rapport au centre *O* de la Terre :

$$\vec{L}_o\left(M'\right) = \overrightarrow{OM}' \wedge m\vec{v}\,'$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_o\left(M'\right)}{dt} = \overrightarrow{OM}' \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM}' \wedge \left(-\frac{GMm}{OM'^2}\frac{\overrightarrow{OM}'}{OM'}\right) = \vec{0}$$ les vecteurs $\overrightarrow{OM}'$ et $\vec{F}$ étant colinéaires

Le moment cinétique du satellite est donc vectoriellement constant au cours du temps :
$\vec{L}_o\left(t\right) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_1$.

Ce vecteur occupe alors dans l'espace une direction fixe. Le vecteur position du satellite reste perpendiculaire à cette direction fixe par définition du produit vectoriel. Le mouvement de ce satellite est alors contenu dans un plan contenant le point *O* et le vecteur $\vec{v}_1$.

Comme avant de lui communiquer un excédent de vitesse, le satellite évoluait dans un plan contenant le point *O* et le vecteur $\vec{v}_o$ et que les vecteurs $\vec{v}_o$ et $\vec{v}_1$ étant colinéaires, on peut affirmer que la nouvelle trajectoire est contenu dans le plan de l'orbite circulaire.

En un point quelconque de la nouvelle trajectoire, le moment cinétique du satellite s'écrit :

$$\vec{L}_o = r\vec{u}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = mC\vec{u}_z$$ avec $C = r^2\dot{\theta} = cste$ Constante de la loi des aires

La force gravitationnelle étant conservative il y a conservation de l'énergie mécanique du satellite au cours de son mouvement, on a alors en posant après avoir communiqué l'excédent de vitesse :

$$E_m\left(t\right) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_o^2}$$

$$E_m\left(t\right) = 7,4.10^{10}\ \text{J}$$

L'énergie mécanique trouvée est positive, la trajectoire du satellite est une hyperbole (ce qui est cohérent avec le titre de l'exercice).

3. Equation polaire de la trajectoire.

Il existe plusieurs démonstrations de la détermination de l'équation polaire de la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale newtonienne. Techniquement la plus simple est l'utilisation conjointe de la relation de la dynamique et de l'expression de la formule de Binet relative à l'accélération. Comme le texte propose une étude énergétique, on va utiliser la conservation de l'énergie mécanique et en profiter pour démontrer la formule de Binet relative à la vitesse.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GMm}{r}$$

On pose $u = \dfrac{1}{r}$ et comme $\dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2} = Cu^2$ on peut écrire :

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}Cu^2\right)^2 = C^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \text{ car } \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = Cu^2$$

$$r^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{u^2}C^2u^4 = C^2u^2$$

On obtient ainsi une nouvelle expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mC^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - GMmu$$

Comme l'énergie mécanique se conserve au cours du temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_m}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ or } \frac{d\theta}{dt} \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{dE_m}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dE_m}{d\theta} = \frac{1}{2}mC^2\left(2\left(\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) + 2u\left(\frac{du}{d\theta}\right)\right) - GMm\left(\frac{du}{d\theta}\right) = 0$$

Comme $\left(\frac{du}{d\theta}\right) \neq 0$:

$$C^2\left(\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) + u\right) - GM = 0$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

Le terme $\frac{GM}{C^2}$ est homogène à l'inverse d'une longueur p telle que : $\frac{1}{p} = \frac{GM}{C^2}$. L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p}$$

La solution est de la forme :

$$u = \frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_o) + \frac{1}{p}$$

$$r = \frac{p}{1 + Ap\cos(\theta - \theta_o)}$$

On pose $Ap = e$ et $\theta_o = 0$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$ équation polaire d'une conique de paramètre p et d'excentrité *e*.

4. Expression de *p* et valeur de *e*.

Le paramètre de la conique s'écrit en tenant compte de la conservation du moment cinétique du satellite :

$$p = \frac{C^2}{GM} = \frac{L_o^2}{GMm^2} = \frac{m^2r_o^2v_1^2}{GMm^2} = \frac{r_o^2v_1^2}{GM}$$

$$p = 2{,}12.10^7\,\text{m}$$

Comme à l'instant où l'on communique la vitesse v_1 on a posé l'angle polaire nul on a :

$$r_o = \frac{p}{1+e} \rightarrow e = \frac{p}{r_o} - 1$$

$$e = \frac{r_o v_1^2}{GM} - 1$$

$$e = 2,22$$

On trouve $e > 1$ ce qui confirme le caractère hyperbolique de la trajectoire.