M7.1. Mouvement elliptique d'un satellite artificiel.

Enoncé.

Un satellite artificiel de la Terre a une trajectoire elliptique, son apogée est à l'altitude h_A = 350 km et son périgée à l'altitude h_P = 200 km. On note R_T le rayon de la Terre.

1. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de 1'ellipse en fonction de R_T, h_A et h_P.
2. Exprimer le demi-grand axe a, le demi-petit axe b et la demi-distance interfocale c en fonction de R_T, h_A et h_P.
3. En déduire a, b, c en fonction de R_T, h_A et h_P.
   Calculer numériquement tous les paramètres de l'ellipse (R_T = 6400 km).
4. Calculer littéralement l'énergie totale du satellite en fonction de p, e et k constante de force d'interaction puis en fonction de a et k. Conclure.

M7.1. Mouvement elliptique d'un satellite artificiel.
Corrigé.

1. Paramètre et excentricité.
On travaille dans le référentiel géocentrique assimilable au référentiel barycentrique compte tenu de la masse de la Terre devant celle du satellite. Ce référentiel est supposé galiléen.
La masse du mobile équivalent est aussi très peu différente de celle du satellite.
On se place dans le cas où l'axe polaire est confondu avec l'axe focal de la conique, l'équation de la trajectoire est alors de la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

On considérant les valeurs extrémales de *r* on a :

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = R_T + h_P$$

$$r_{max} = \frac{p}{1-e} = R_T + h_A$$

Le rapport de ces deux dernières égalités donne :

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{R_T + h_P}{R_T + h_A}$$

D'où :

$$\boxed{e = \frac{h_A - h_P}{2R_T + h_A + h_P}}$$

Comme :

$$p = (1-e)(R_T + h_A)$$

On a alors :

$$p = \left(1 - \frac{h_A - h_P}{2R_T + h_A + h_P}\right)(R_T + h_A)$$

Finalement :

$$\boxed{p = \frac{2(R_T + h_A)(R_T + h_P)}{2R_T + h_A + h_P}}$$

2. Demi-grand axe, demi-petit axe et demi-distance interfocale.
Nous avons :

$$2a = r_{min} + r_{max} = p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right)$$

$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$$

L'excentricité *e* est définie par $e = c/a$. On obtient :

$$\boxed{c = ea = \frac{pe}{1-e^2}}$$

Comme :

$$b^2 = a^2 - c^2$$

On obtient :

$$\boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}}$$

3. Expression de *a*, *b* et *c*.
Comme :

$$2a = r_{min} + r_{max}$$

On a :

$$\boxed{a = \frac{2R_T + h_A + h_P}{2}}$$

$$c = ea = \frac{h_A - h_P}{2R_T + H_A + h_P}\frac{2R_T + h_A + h_P}{2}$$

$$\boxed{c = \frac{h_a - h_P}{2}}$$

D'autre part :

$$2c = 2R_T + h_A + h_P - 2\left(R_T + h_P\right)$$

$$b = \frac{2(R_T + h_A)(R_T + h_P)}{2R_T + h_A + h_P} / \sqrt{1 - \frac{\left(h_A - h_P\right)^2}{2R_T + h_A + h_P}}$$

$$\boxed{b = \sqrt{\left(R_T + h_A\right)\left(R_T + h_P\right)}}$$

e = 0,011 *p* = *6674,2* km *a* = 6675 km *c* = 75 km *b* = 6674,6 km

La trajectoire est quasi circulaire.

4. Energie mécanique.
La force qui s'exerce sur le satellite est :

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$$

L'énergie potentielle associée est donc :

$$E_p(r) = -\frac{k}{r} = -ku$$

avec :

$$u = \frac{1}{r}$$

L'énergie mécanique s'écrit en utilisant la formule de Binet relative à la vitesse :

$$E_m = \frac{1}{2}mC^2\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2\right) - ku$$

Comme :

$$u = \frac{1 + e\cos\theta}{p} \quad ; \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{p}\sin\theta$$

On obtient :

$$E_m = \frac{mC^2}{2p^2}\left(1 + 2e\cos\theta + e^2\right) - \frac{k}{p}\left(1 + e\cos\theta\right)$$

Or :

$$\frac{k}{p} = \frac{mC^2}{p^2} \quad \text{car} \quad p = \frac{mC^2}{k}$$

$$E_m = \frac{k}{2p}\left(e^2 - 1\right)$$

Comme :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{k}{2a}}$$

L'énergie mécanique d'un satellite ne dépend pas de l'excentricité mais seulement du grand axe.