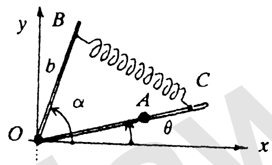
M6.7. Sismographe de La Coste.

Enoncé.

Une tige, de masse négligeable et de longueur L, portant un point matériel A de masse m, oscille sans frottement autour de l'axe Oz horizontal d'un référentiel terrestre $R = Oxyz$ (Oy est la verticale ascendante). Un ressort, d'extrémités B et C, exerce sur la tige une force de rappel $K\overrightarrow{CB}$ proportionnelle à sa longueur CB.

On note :

$$OA = a \quad ; \quad OB = b \quad ; \quad OC = l \quad ; \quad \left(\vec{u}_x ; \overrightarrow{OB}\right) = \alpha \text{ ,}$$ α étant un angle fixe.



1. En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle en θ.
2. A quelle condition sur m, g, l, a, b, K et α, l'angle définissant la position de repos est-il nul ?
3. Trouver l'expression de la période des petites oscillations en fonction de a, g et α.
   On donne $a = 5$ cm.
   Quelle doit être la valeur de α pour avoir une période To de 20 s ?

M6.7. Sismographe de La Coste.

Corrigé.

1. Equation différentielle du mouvement.

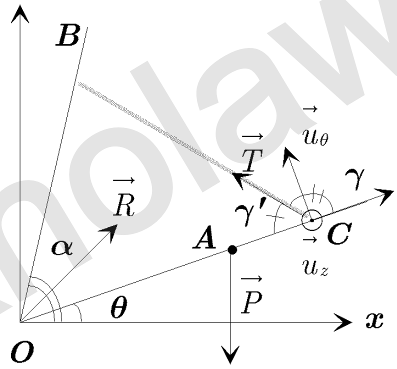
On étudie le système constitué de la tige sans masse et du point matériel A et cela dans le référentiel terrestre posé galiléen.

Ce système est soumis à :

Son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Réaction de l'axe de rotation en O : $\vec{R}$

Tension du ressort : $\vec{T} = k\overrightarrow{CB}$



On applique le théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{M}_O^{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_O^{\vec{R}} + \overrightarrow{M}_O^{\vec{T}}$$

Avec :

$$\overrightarrow{M}_O^{\vec{P}} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g} = -mga\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_z = -mga\cos\theta\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{M}_O^{\vec{R}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M}_O^{\vec{T}} = \overrightarrow{OC} \wedge k\overrightarrow{CB} = klCB\sin\gamma\vec{u}_z$$

$$\sin\gamma' = \sin\gamma$$

La relation des « sinus » permet d'exprimer la longueur BC et l'angle γ en fonction des données l, α et θ :

$$\frac{\sin\gamma'}{b} = \frac{\sin(\alpha-\theta)}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC\sin\gamma' = b\sin(\alpha-\theta)$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v} = a\vec{u}_r \wedge ma\dot{\theta}\vec{u}_\theta = ma^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = ma^2\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

On obtient en effectuant une projection suivant le vecteur $\vec{u}_z$:

$$ma^2\ddot{\theta} = -mga\cos\theta + klb\sin\left(\alpha - \theta\right)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\cos\theta - \frac{klb}{ma^2}\sin\left(\alpha - \theta\right) = 0}$$

2. Condition.

Au repos :

$$\theta = 0 \ ; \qquad \dot{\theta} = 0 \ ; \qquad \ddot{\theta} = 0$$

Avec ces valeurs l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{g}{a} - \frac{klb}{ma^2}\sin\alpha = 0$$

$$\boxed{mga = klb\sin\alpha}$$

3. Période des petites oscillations.

On utilise la relation précédente pour exprimer sous une nouvelle forme l'équation différentielle du mouvement :

$$klb = \frac{mga}{\sin\alpha}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\cos\theta - \frac{g}{a\sin\alpha}\sin\left(\alpha - \theta\right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\cos\theta - \frac{g}{a\sin\alpha}\left(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta\right) = 0$$

Dans le cas où l'angle θ est petit, l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} - \frac{g}{a\sin\alpha}\left(\sin\alpha - \theta\cos\alpha\right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\frac{1}{\tan\alpha}\theta = 0$$

L'équation différentielle est caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{a}\frac{1}{\tan\alpha}}$ et donc de période :

$$\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}\tan\alpha}}$$

Pour $T_o = 20\text{s}$; $\tan\alpha = 1988$; $\alpha = 89{,}97°$