M6.5. Mouvement d'une particule dans un champ de force dérivant de l'énergie potentielle *Ep = kxy*.

On considère le référentiel galiléen (*R*) muni de la base $\left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$.

On considère le point *M* de masse *m*, susceptible de se déplacer dans le plan *xOy*.
On suppose que *M* possède l'énergie potentielle $Ep = kxy$, avec k constante positive.

1. Déterminer la force $\vec{F}$ qui dérive de *Ep*.
2. Donner l'expression du vecteur moment cinétique $\vec{L}_o(M)$ de *M* en *O*.
3. Appliquer le théorème du moment cinétique à *M*, et déduire une relation ® entre $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$.
4. On suppose que *M* se déplace sur la droite d'équation $y = x + l$, et que la résultante des forces subies par M se réduit à $\vec{F}$. Que devient ® dans ce cas ?
   Déterminer $x(t)$ si *M* est lâché du point d'abscisse *a* avec une vitesse nulle à $t = 0$.
5. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à *M*, en déduire le système d'équations différentielles satisfaites par *x* et *y*.
6. On pose $p = x + y$ et $q = x - y$: donner le système d'équations différentielles satisfaites par *p* et *q* et résoudre si *M* est lancé à $t = 0$ du point ($x = a$, $y = a$) avec la vitesse (v_o,$-v_o$).
7. En déduire $x(t)$ et $y(t)$.