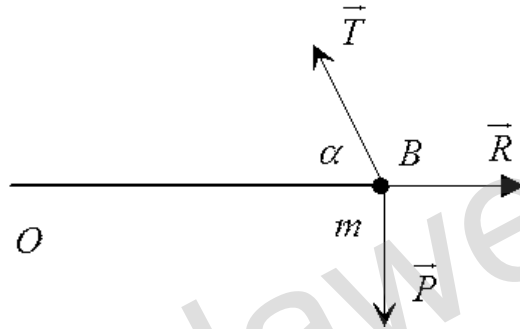


M6.3. Gravimètre à ressort.

1. Longueur à l'équilibre.

A l'équilibre la tige OB est horizontale. On étudie la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids \vec{P} , à la tension \vec{T} du ressort et à la réaction \vec{R} de la tige.



A l'équilibre on a : $\vec{M}_o^{\vec{P}} + \vec{M}_o^{\vec{T}} + \vec{M}_o^{\vec{R}} = \vec{0}$.

Comme la droite d'action de la réaction de la tige passe par le point O , son moment est nul.

En projection suivant le vecteur \vec{e}_x :

$$-mgb + Tb \sin(\pi - \alpha) = 0 \text{ or } \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{a}{l_{\text{eq}}}$$

$$-mg + k(l_{\text{eq}} - l_o) \frac{a}{l_{\text{eq}}} = 0 \text{ d'où :}$$

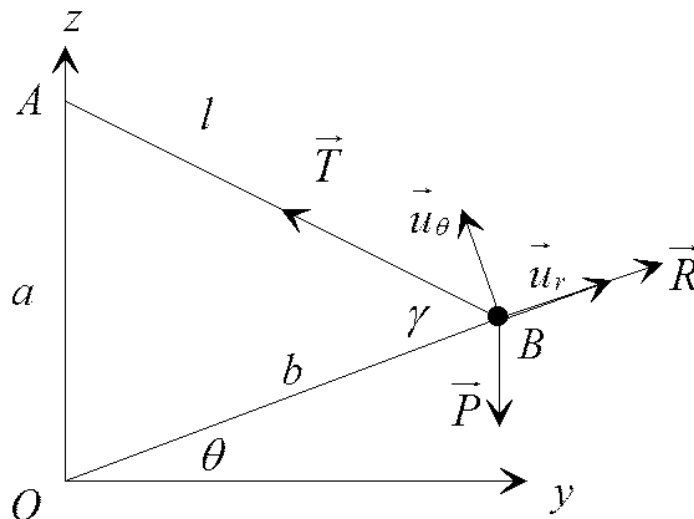
$$l_{\text{eq}} = \frac{k a l_o}{k a - m g}$$

Pour que l'équilibre existe il faut que $k a > m g$.

2. Période des oscillations.

On applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_o(B)}{dt} = \vec{M}_o^{\vec{P}} + \vec{M}_o^{\vec{T}} + \vec{M}_o^{\vec{R}}$$



Les expressions des différents termes sont :

$$\vec{M}_o^{\vec{P}} = \vec{OB} \wedge m\vec{g} = -mgb \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{e}_x = -mgb \cos\theta \vec{e}_x$$

$$\vec{M}_o^{\vec{T}} = \vec{OB} \wedge \vec{T} = Tb \sin(\pi - \gamma) \vec{e}_x = Tb \sin\gamma \vec{e}_x$$

$$\vec{M}_o^{\vec{R}} = \vec{0}$$

$$\vec{L}_o(B) = \vec{OB} \wedge m\vec{v} = b\vec{u}_r \wedge mb\dot{\theta}\vec{u}_r = mb^2\dot{\theta}\vec{e}_x \Rightarrow \frac{d\vec{L}_o(B)}{dt} = mb^2\ddot{\theta}\vec{e}_x$$

La projection suivant \vec{e}_x permet d'écrire que :

$$-mg \cos\theta + T \sin\gamma = mb\ddot{\theta} \quad (1)$$

Dans le triangle OBA , la relation des « sinus » s'écrit :

$$\frac{\sin\gamma}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{l} = \frac{\cos\theta}{l} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{a}{l} \cos\theta$$

D'autre part : $T = k(l - l_o)$. La relation (1) s'écrit alors :

$$-mg \cos\theta + k(l - l_o) \frac{a}{l} \cos\theta = mb\ddot{\theta}$$

L'angle θ étant petit, on a en négligeant les infiniments petits d'ordre 2 : $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = \theta$.

L'équation différentielle s'écrit :

$$-mg + k(l - l_o) \frac{a}{l} = mb\ddot{\theta}$$

La condition d'équilibre déterminée à la question 1 permet d'exprimer la grandeur mg sous la forme :

$$mg = ka \frac{l_{\text{éq}} - l_o}{l_{\text{éq}}}$$

On obtient une nouvelle expression de l'équation différentielle du mouvement :

$$ka \left(\frac{l - l_o}{l} - \frac{l_{\text{éq}} - l_o}{l_{\text{éq}}} \right) = ka \left(1 - \frac{l_o}{l} - 1 + \frac{l_o}{l_{\text{éq}}} \right) = kal_o \left(\frac{l - l_{\text{éq}}}{ll_{\text{éq}}} \right) = mb\ddot{\theta} \text{ soit : } kal_o \left(\frac{l - l_{\text{éq}}}{ll_{\text{éq}}} \right) = mb\ddot{\theta} \quad (2)$$

D'autre part :

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} \Rightarrow AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OB}$$

$$l^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = a^2 + b^2 - 2ab \sin\theta = l_{\text{éq}}^2 - 2ab \sin\theta$$

$$l^2 = l_{\text{éq}}^2 \left(1 - \frac{2ab \sin\theta}{l_{\text{éq}}^2} \right)$$

$$l = l_{\text{éq}} \left(1 - \frac{2ab \sin\theta}{l_{\text{éq}}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx l_{\text{éq}} \left(1 - \frac{ab\theta}{l_{\text{éq}}^2} \right)$$

On peut alors exprimer les termes intervenant dans l'équation différentielle (2) :

$$l - l_{\text{éq}} = -\frac{ab\theta}{l_{\text{éq}}}$$

$$U_{\text{éq}} = l_{\text{éq}}^2 \left(1 - \frac{ab\theta}{l_{\text{éq}}^2} \right) = l_{\text{éq}}^2 - ab\theta$$

$$\frac{l - l_{\text{éq}}}{U_{\text{éq}}} = -\frac{ab\theta}{l_{\text{éq}}(l_{\text{éq}}^2 - ab\theta)} \approx -\frac{ab\theta}{l_{\text{éq}}^3}$$

On obtient une nouvelle expression de l'équation différentielle (2) :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \frac{a^2 l_o}{l_{\text{éq}}^3} \theta = 0$$

La période T_o des petites oscillations a pour expression :

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \frac{l_{\text{éq}}^3}{a^2 l_o}}$$

Comme $l_o = \frac{l_{\text{éq}}(ka - mg)}{ka}$ d'après la question 1 et que $l_{\text{éq}}^2 = a^2 + b^2$ on obtient :

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \frac{ka(a^2 + b^2)}{a^2(ka - mg)}}$$

$$\boxed{T_o = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 + b^2)}{a(ka - mg)}}$$

Lorsque ka est voisin de mg par valeur supérieure, la valeur de la période des oscillations devient grande ce qui en permet une mesure précise et ainsi donne une valeur de l'intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience.