**M6.1. Pendule conique.**

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On considère le point *M* de masse *m*. Les forces appliquées à ce système sont :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ ;
- la tension $\vec{T}$ du fil.

Si le point M est animé d'un mouvement circulaire alors *r* et *z* sont des constantes.
On applique le théorème du moment cinétique au point *M* par rapport au point fixe *O* du référentiel galiléen d'étude.

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \overrightarrow{M}_O^{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_O^{\vec{T}}$$

Le moment de la tension du fil par rapport à O est nul car les vecteurs $\vec{T}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires. D'autre part :

$$\overrightarrow{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = (r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}) \wedge mr\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} - mrz\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = mr^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z} - mrz\ddot{\theta}\overrightarrow{u_r} - mrz\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{M}_O^{\vec{P}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = mgr\overrightarrow{u_\theta}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} -mrz\ddot{\theta} = 0 \quad (1) \\ -rz\dot{\theta}^2 = gr \quad (2) \\ mr^2\ddot{\theta} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) montrent que le mouvement est uniforme car la vitesse angulaire est constante.
L'équation (2) permet d'écrire :

$$z\dot{\theta}^2 = -g$$

Or :

$$z = -l\cos\alpha \quad ; \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{(l\sin\alpha)^2}$$

On obtient pour expression pour la vitesse à communiquer :

$$v = \sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}\sin\alpha$$