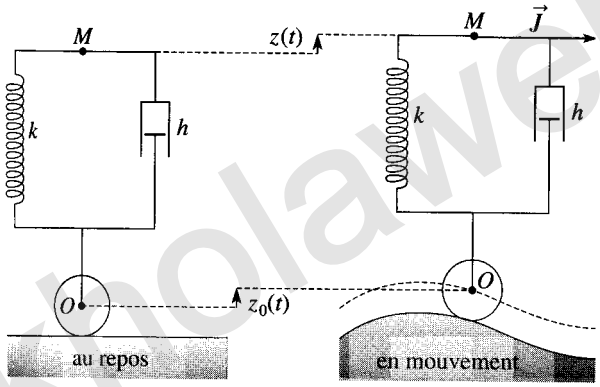
M5.4. Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée.

Enoncé.

Un véhicule automobile est sommairement modélisé par une masse m placée en *M* et reposant sur une roue de centre *O*, par l'intermédiaire d'un ressort de raideur *k* mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement *h*. En toutes circonstances, l'axe *OM* reste vertical. On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse *v* sur une route dont le profil impose au centre *O* de la roue une élongation $z_O(t) = a\cos(2\pi x/\lambda)$ par rapport à sa position d'équilibre. On repère le mouvement de la masse par son élongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand le véhicule est au repos. On rappelle qu'un amortisseur placé entre *O* et *M* exerce sur *M* une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de *M* par rapport à *O* : $f_r = -h(\dot{z}_M - \dot{z}_O)$.



1. Etablir l'équation différentielle en $z(t)$ du mouvement de la masse, lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante *v*.
2. Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.
A quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

www.kholaweb.com

M5.4. Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée.
Corrigé.

1. Equation différentielle en *z*(*t*).
Dans le référentiel terrestre posé galiléen on applique la seconde relation de Newton à la masse *m* :

$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{P} + \vec{T}$ (1) où :

$\vec{f} = -h\left(\dot{z}_m - \dot{z}_o\right)\vec{u}_z$ force de frottement fluide

$\vec{T} = -k\left(l - l_o\right)\vec{u}_z$ tension du ressort avec *l* longueur du ressort à une date *t* et l_o sa longueur à vide

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ poids de la masse *m*

Comme la vitesse du véhicule est constante on peut écrire que $v = \dfrac{x}{t}$ et donner ainsi une nouvelle expression à l'élongation :

$$z_o\left(t\right) = a\cos\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right) \quad (2)$$

On projette l'équation (1) suivant $\vec{u}_z$:

$$ma_z = -h\left(\dot{z}_m - \dot{z}_o\right) - k\left(l - l_o\right) - mg \quad (3)$$

Lorsque la masse m est à l'équilibre la relation (3) s'écrit :

$0 = -k\left(l_{éq} - l_o\right) - mg$ (4) avec $l_{éq}$ longueur du ressort à l'équilibre.

De (4) on tire que :

$$-mg = k\left(l_{éq} - l_o\right) \quad (5)$$

En tenant compte du résultat (5), la relation (3) devient :

$$ma_z = -h\left(\dot{z}_m - \dot{z}_o\right) - k\left(l - l_{éq}\right) \quad (6)$$

D'autre part :

$$\dot{z}_o = -a\frac{2\pi v}{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right) \quad (7)$$

$$l_{éq} + z_m\left(t\right) = l + z_o\left(t\right) \rightarrow l - l_{éq} = z_m\left(t\right) - z_o\left(t\right) \quad (8)$$

Il vient ainsi en explicitant (7) et (8) dans (6) :

$$m\ddot{z}_m = -h\dot{z}_m - ha\frac{2\pi v}{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right) - kz_m + ka\cos\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right)$$

$$\boxed{m\ddot{z}_m + h\dot{z}_m + kz_m = ka\cos\left(\omega t\right) - ha\omega\sin\omega t} \quad (9) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

2. Amplitude du mouvement.
On applique la méthode de la représentation complexe :

$$z_m = z_M\cos\left(\omega t + \varphi\right) \rightarrow \underset{\sim}{z}_m = \underset{\sim}{z}_M\exp\left(j\omega t\right) \text{ avec } \underset{\sim}{z}_M = z_M\exp\left(j\varphi\right)$$

En introduisant cette expression de l'élongation dans l'équation (9) et en simplifiant par $\exp\left(j\omega t\right)$ on obtient :

$$-m\omega^2 \underset{\sim}{z}_M + j\omega h \underset{\sim}{z}_M + k\underset{\sim}{z}_M = ka + ha\omega \exp\left(j\psi\right) \text{ avec } \psi = \frac{\pi}{2} \text{ car } -\sin\omega t = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underset{\sim}{z}_M = \frac{ka + ha\omega \exp\left(j\psi\right)}{k - m\omega^2 + j\omega h}$$

L'amplitude du mouvement a pour expression :

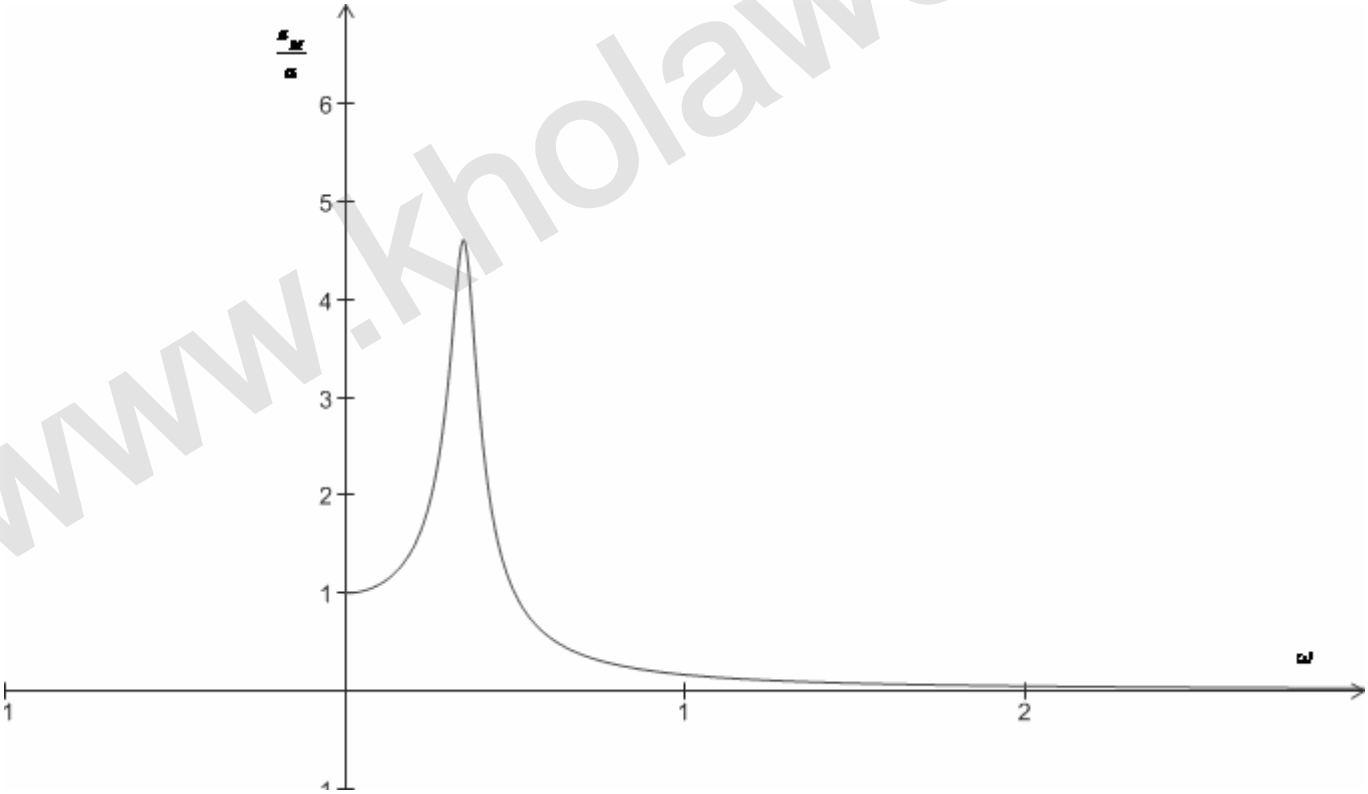
$$\boxed{z_M = \left|\underset{\sim}{z}_M\right| = a\left(\frac{k^2 + h^2\omega^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \omega^2 h^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

On peut remarquer que :

$z_M\left(\omega = 0\right) = a$, $\omega = 0$ correspondant à une vitesse nulle de la voiture ;

$z_M\left(\omega \to \infty\right) = 0$

Pour ce type de système il existe une pulsation de résonance ω_r qui correspond à une certaine vitesse v_r.



Il faut donc rouler à une vitesse supérieure à celle de résonance pour que l'amplitude des oscillations soit faible mais au risque d'une perte d'adhérence du véhicule.

www.kholaweb.com