M5-3

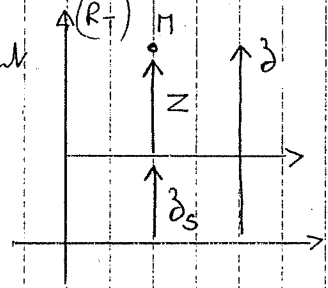
Amortisseurs. Etude de quelques systèmes.

I. Mouvement sans suspension.

1. Existence de deux régimes.

On étudie comme système la masse M dans le référentiel galiléen constitué de la Terre au repos.

Deux cas sont possibles :



- M reste sur le sol en mouvement

On a alors :

$Z = 0$ et existence d'une réaction du sol $\vec{R}$

La RFD donne dans (R_T)

$$\vec{P} + \vec{R} = M \ddot{z}\, \vec{e_z}$$

$$-Mg + R_z = M\ddot{z} = M\ddot{z}_s$$

$R_z = M(\ddot{z}_s + g)$ or $R_z > 0$ si M repose au sol.

On en déduit $\ddot{z}_s \geqslant -g \Rightarrow |\ddot{z}_s| \leqslant g$

- M n'est plus sur le sol en mouvement

$Z \neq 0$ mais $\vec{R} = \vec{0}$

On a

$$\vec{P} = M\ddot{z}\,\vec{e_z} \qquad \ddot{z} = -g$$

On en déduit que $a_M = -g$ et que pour $|a_S(t)| = |\ddot{z}_s| < |a_M|$ l'objet reste en contact avec le sol.

2. Comme $|a_S|$ peut devenir supérieur à $|a_M|$, la masse M peut décoller du sol.

2.1 Altitude z_D.

Dans R_T la relation de la dynamique s'écrit tant que M reste au sol $\vec{P} + \vec{R} = M\ddot{z}_M\,\vec{e_z}$ soit

$$-Mg + R_z = M\ddot{z}_M = M\ddot{z}_s = M\, z_0\,\omega^2 \cos\omega t$$

A la date t_D du décollage on a $R_z = 0$ d'où :

$$-Mg = M z_0 \omega^2 \cos\omega t_D$$

Soit :

$$\cos\omega t_D = -\frac{g}{z_0\omega^2}$$

Or à la date t_D $z_S(t_D) = z_M(t_D) = z_D$.

$$\boxed{z_D = z_0\left(1 + \frac{g}{z_0}\frac{1}{\omega^2}\right)}$$

2.2 Altitude z_M

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les points D et M.

en D : $\dot{z}_D = \dot{z}_s(t_D) = z_0\,\omega \sin\omega t_D$

or $\sin\omega t_D = \sqrt{1 - \cos^2\omega t_D} = \sqrt{1 - \frac{g^2}{z_0^2}\frac{1}{\omega^4}}$

d'où $\dot{z}_D = z_0\,\omega\left(1 - \frac{g^2}{z_0^2}\frac{1}{\omega^4}\right)^{1/2}$

en M $\dot{z}_M = 0$

Entre D et M on a

$$-\frac{1}{2} M z_0^2 \omega^2\left(1 - \frac{g^2}{z_0^2}\frac{1}{\omega^4}\right) = Mg(z_D - z_M)$$

$$z_M = z_D + \frac{1}{2}\frac{z_0^2\omega^2}{g}\left(1 - \frac{g^2}{z_0^2}\frac{1}{\omega^4}\right)$$

$$z_n = z_0\left(1+\frac{g}{z_0}\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{z_0^2\omega^2}{g}\left(1-\frac{g^2}{z_0^2}\frac{1}{\omega^4}\right)$$

$$z_n = z_0\left(1+\frac{g}{z_0}\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{z_0^2\omega^2}{g}-\frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}$$

$$z_n = z_0+\frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}+\frac{1}{2}\frac{z_0^2\omega^2}{g}$$

$$\boxed{z_n = z_0\left(1+\frac{z_0\omega^2}{2g}\right)+\frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}}$$

3.3 Durée de la phase libre

A partir de la date t_D, la masse n'est plus en contact avec le sol (et cela pour une certaine durée).

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{z} = -g \longrightarrow \dot{z} = -g(t-t_D)+\dot{z}_D$$

$$z = -\frac{1}{2}g(t-t_D)^2+\dot{z}_D(t-t_D)+z_D$$

Soit $z = z_D$:

Cela se produit si $t = t_D$ ou si :

$$z_D = -\frac{1}{2}g(t-t_D)^2+\dot{z}_D(t-t_D)+z_D$$

$$t-t_D = +\frac{2\dot{z}_D}{g}$$

$$\boxed{t-t_D = \frac{2}{g}z_0\omega\left(1-\frac{g^2}{z_0^2}\frac{1}{\omega^4}\right)^{1/2}}$$

3.1 Vitesse maximale

Si le système ne décolle pas on a :

$$|\ddot{z}_s| < g \Longrightarrow |z_0\omega^2\cos\omega t| < g$$

$$\Longrightarrow z_0\omega^2 < g$$

Si v est la vitesse horizontale et λ la période spatiale

$$\lambda = vT = v\frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda}v$$

soit $z_0\dfrac{4\pi^2v^2}{\lambda^2} < g$

$$v < \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{z_0}} \qquad v < 6{,}3\ \text{m/s} = 22{,}7\ \text{km/h}.$$

3.2 Hauteur

Si $v = 60\ \text{km/h} = 16{,}7\ \text{m s}^{-1}$, $\omega = 52{,}36$ rad/s

$$z_n = z_0\left(1+\frac{z_0\omega^2}{g}\right)+\frac{1}{2}g\frac{1}{\omega^2}$$

$$z_n = 0{,}025\left(1+\frac{0{,}025\times(52{,}36)^2}{2\times 9{,}8}\right)+\frac{1}{2}\frac{9{,}8}{(52{,}36)^2}$$

$$z_n = 11{,}4\ \text{cm}.$$

3.3 Perte de contrôle

On estime la perte de contrôle à $\Delta t = 0{,}26$ s.

A 60 km h^{-1} le véhicule parcourt 4,4 m. Le système "survole" plus de 2 bosses. On peut donc considérer que l'on n'a plus du tout le contrôle du véhicule.