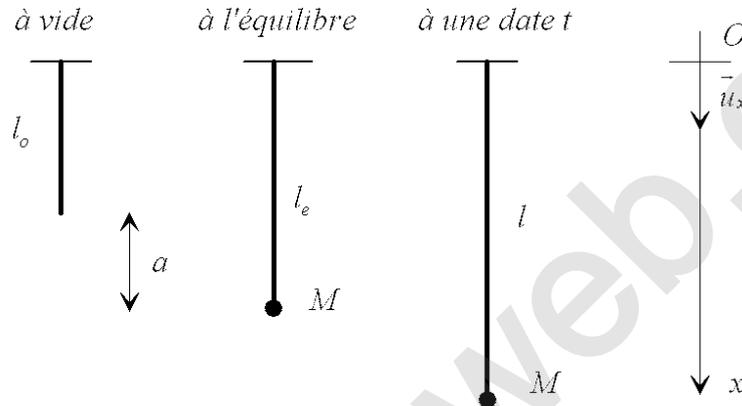


## M4.6. Petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre.

### 1. Allongement $a$ .

On applique au point  $M$  de masse  $m$  la seconde loi de Newton et cela dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Ce point est soumis à son poids et à la tension du ressort.



A l'équilibre :

$$mg\vec{u}_x - k(l_e - l_o)\vec{u}_x = \vec{0}$$

$$mg - k(l_e - l_o) = 0 \quad (1)$$

$$mg - ka = 0$$

$$a = \frac{m}{k}g \quad (2)$$

A une date  $t$  du mouvement :

$$mg\vec{u}_x - k(l - l_o)\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

$$mg - k(l - l_o) = m\ddot{x} \quad (3)$$

En effectuant (3) - (1) on obtient :

$$mg - k(l - l_o) - mg + k(l_e - l_o) = m\ddot{x}$$

$$-k(l - l_e) = m\ddot{x}$$

On pose  $X = (l - l_e)$  et comme  $x = l$  on a  $\ddot{x} = \ddot{X}$  d'où :

$$m\ddot{X} + kX = 0$$

$$\ddot{X} + \omega_o^2 X = 0 \quad \text{avec } \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Cette dernière équation est celle d'un oscillateur harmonique.

$X$  rend compte de l'écart par rapport à la position d'équilibre et  $\omega_o$  de la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre.

La relation (2) peut aussi s'écrire :

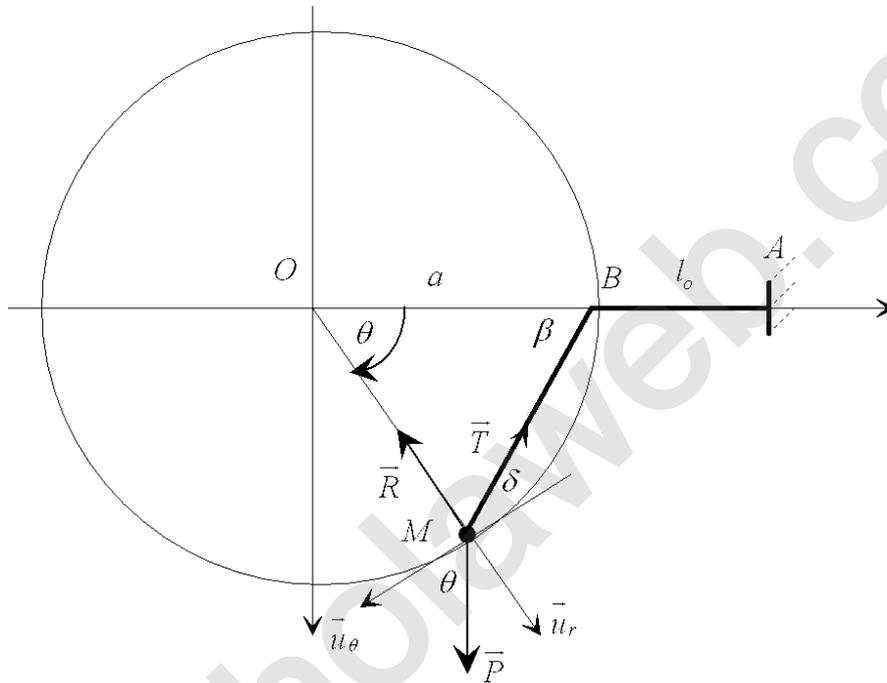
$$g = \omega_o^2 a \quad (4)$$

## 2. Equation différentielle.

Pour déterminer l'équation différentielle du mouvement, on applique au point  $M$  de masse  $m$  la seconde loi de Newton et cela dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Ce point est soumis à son poids, à la tension du ressort et à la réaction du support.

$$m\vec{g} - k(l - l_0)\vec{u} + \vec{R} = m\vec{a}$$



La projection suivant le vecteur  $\vec{u}_\theta$  donne :

$$mg \cos \theta - k(l - l_0) \cos \delta = ma\ddot{\theta} \quad (5)$$

On exprime l'allongement  $(l - l_0)$  en fonction de l'angle  $\theta$  :

$$(l - l_0) = 2a \sin \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

D'autre part :

$\cos \delta = \sin \beta$  avec l'angle  $\beta$  tel que :  $2\beta + \theta = \pi \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$  le triangle  $OBM$  étant isocèle.

$$\sin \beta = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \cos \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

En tenant compte des résultats (6) et (7), l'équation (5) s'écrit :

$$mg \cos \theta - 2ka \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = ma\ddot{\theta}$$

$$mg \cos \theta - ka \sin \theta = ma\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \sin \theta - \frac{g}{a} \cos \theta = 0 \quad \text{or} \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{a} = \omega_0^2$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (\sin \theta - \cos \theta) = 0 \quad (8)$$

A l'équilibre  $\ddot{\theta} = 0$  et  $\theta = \alpha$  d'où :

$$\sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Soit  $\theta = \alpha + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . L'équation différentielle (8) s'écrit alors :

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 (\sin(\alpha + \varepsilon) - \cos(\alpha + \varepsilon)) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 (\sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cos \alpha - \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \alpha \sin \varepsilon) = 0$$

Or  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$  et  $\cos \varepsilon \approx 1$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_o^2 (\sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha - \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) = 0 \quad \text{or} \quad \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\ddot{\varepsilon} + 2\omega_o^2 \sin \alpha \varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_o^2 \sqrt{2} \varepsilon = 0$$

Autour de la position d'équilibre  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , la masse  $m$  oscille à la pulsation  $\omega = \sqrt{\sqrt{2}} \omega_o$ . La position d'équilibre étudiée est donc stable.