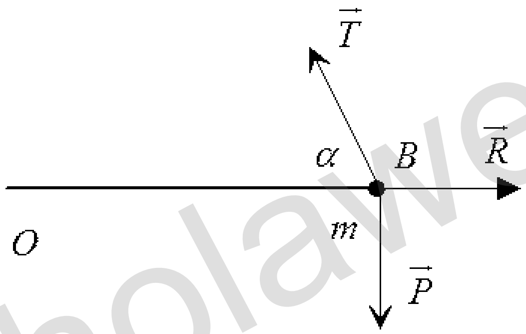
M4.5. Gravimètre à ressort.

1. Longueur à l'équilibre.
A l'équilibre la tige *OB* est horizontale. On étudie la masse *m* dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$, à la tension $\vec{T}$ du ressort et à la réaction $\vec{R}$ de la tige.

A l'équilibre on a : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=\vec{0}$.



En projection suivant *Oz* :

$$-mg+T\sin\alpha=0 \text{ or } \sin\alpha=\frac{a}{l_{éq}}$$

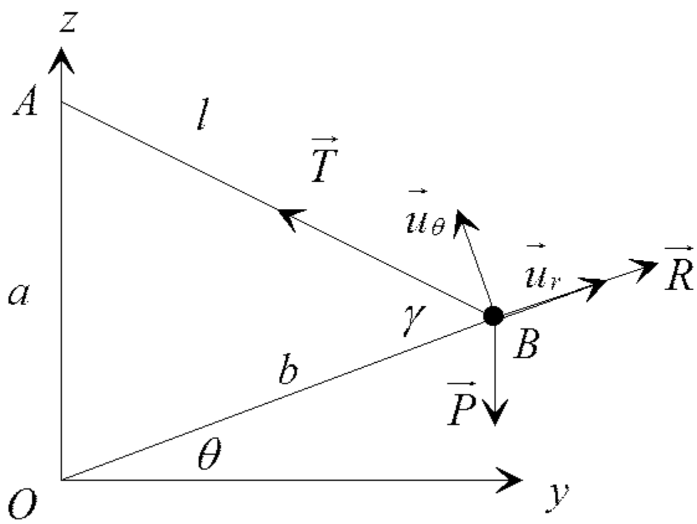
$$-mg+k\left(l_{éq}-l_o\right)\frac{a}{l_{éq}}=0 \text{ d'où :}$$

$$l_{éq}=\frac{kal_o}{ka-mg}$$

Pour que l'équilibre existe il faut que $ka > mg$.

2. Période des oscillations.
On applique la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\vec{a}$$



La projection suivant $\vec{u}_\theta$ permet d'écrire que :

$$-mg\cos\theta + T\sin\gamma = mb\ddot{\theta} \quad (1)$$

Dans le triangle *OBA*, la relation des « sinus » s'écrit :

$$\frac{\sin\gamma}{a} = \frac{\sin\left(\pi/2 - \theta\right)}{l} = \frac{\cos\theta}{l} \;\Rightarrow\; \sin\gamma = \frac{a}{l}\cos\theta$$

D'autre part : $T = k\left(l - l_o\right)$

La relation (1) s'écrit alors :

$$-mg\cos\theta + k\left(l - l_o\right)\frac{a}{l}\cos\theta = mb\ddot{\theta}$$

L'angle θ étant petit, on a en négligeant les infiniments petits d'ordre 2 : $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = \theta$.
L'équation différentielle s'écrit :

$$-mg + k\left(l - l_o\right)\frac{a}{l} = mb\ddot{\theta}$$

La condition d'équilibre déterminée à la question 1 permet d'exprimer la grandeur *mg* sous la forme :

$$mg = ka\frac{l_{éq} - l_o}{l_{éq}}$$

On obtient une nouvelle expression de l'équation différentielle du mouvement :

$$ka\left(\frac{l - l_o}{l} - \frac{l_{éq} - l_o}{l_{éq}}\right) = ka\left(1 - \frac{l_o}{l} - 1 + \frac{l_o}{l_{éq}}\right) = kal_o\left(\frac{l - l_{éq}}{ll_{éq}}\right) = mb\ddot{\theta}$$

$$kal_o\left(\frac{l - l_{éq}}{ll_{éq}}\right) = mb\ddot{\theta} \quad (2)$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \;\Rightarrow\; AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$$

$$l^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta = l_{éq}^2 - 2ab\sin\theta$$

$$l^2 = l_{éq}^2\left(1 - \frac{2ab\sin\theta}{l_{éq}^2}\right)$$

$$l = l_{éq}\left(1 - \frac{2ab\sin\theta}{l_{éq}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx l_{éq}\left(1 - \frac{ab\theta}{l_{éq}^2}\right)$$

On peut alors exprimer les termes intervenant dans l'équation différentielle (2) :

$$l - l_{éq} = -\frac{ab\theta}{l_{éq}}$$

$$ll_{éq} = l_{éq}^2\left(1 - \frac{ab\theta}{l_{éq}^2}\right) = l_{éq}^2 - ab\theta$$

$$\frac{l - l_{éq}}{ll_{éq}} = -\frac{ab\theta}{l_{éq}\left(l_{éq}^2 - ab\theta\right)} \approx -\frac{ab\theta}{l_{éq}^3}$$

On obtient une nouvelle expression de l'équation différentielle (2) :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\frac{a^2 l_o}{l_{éq}^3}\theta = 0$$

La période T_o des petites oscillations a pour expression :

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}\frac{l_{éq}^3}{a^2 l_o}}$$

Comme $l_o = \frac{l_{éq}\left(ka - mg\right)}{ka}$ d'après la question 1 et que $l_{éq}^2 = a^2 + b^2$ on obtient :

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}\frac{ka\left(a^2 + b^2\right)}{a^2\left(ka - mg\right)}}$$

$$\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{a\left(ka - mg\right)}}}$$

Lorsque *ka* est voisin de *mg* par valeur supérieure, la valeur de la période des oscillations devient grande ce qui en permet une mesure précise et ainsi donne une valeur de l'intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience.