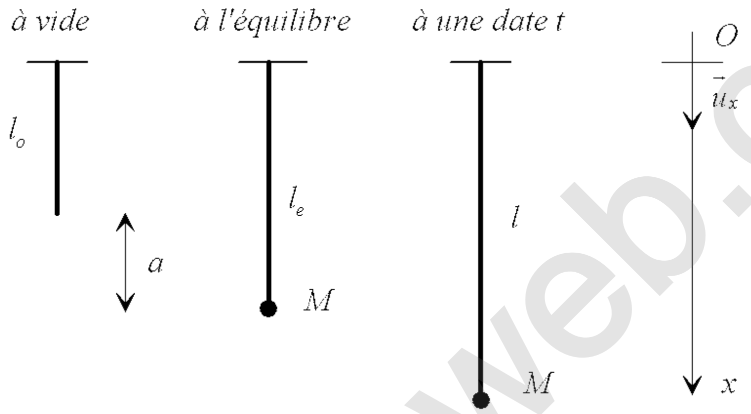
M3.9. Petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre.

1. Allongement *a*.

On applique au point M de masse m la seconde loi de Newton et cela dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Ce point est soumis à son poids et à la tension du ressort.



A l'équilibre :

$$mg\vec{u}_x - k\left(l_e - l_o\right)\vec{u}_x = \vec{0}$$

$$mg - k\left(l_e - l_o\right) = 0 \qquad (1)$$

$$mg - ka = 0$$

$$a = \frac{m}{k}g \qquad (2)$$

A une date t du mouvement :

$$mg\vec{u}_x - k\left(l - l_o\right)\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

$$mg - k\left(l - l_o\right) = m\ddot{x} \qquad (3)$$

En effectuant (3) – (1) on obtient :

$$mg - k\left(l - l_o\right) - mg + k\left(l_e - l_o\right) = m\ddot{x}$$

$$-k\left(l - l_e\right) = m\ddot{x}$$

On pose $X = \left(l - l_e\right)$ et comme $x = l$ on a $\ddot{x} = \ddot{X}$ d'où :

$$m\ddot{X} + kX = 0$$

$$\ddot{X} + \omega_o^2 X = 0 \quad \text{avec } \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Cette dernière équation est celle d'un oscillateur harmonique.

X rend compte de l'écart par rapport à la position d'équilibre et ω_o de la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre.

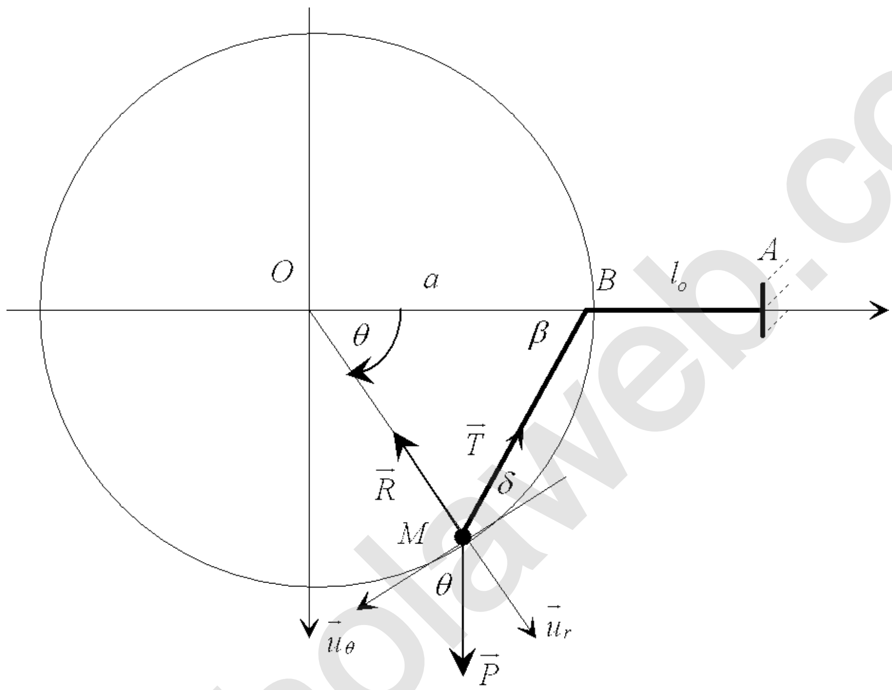
La relation (2) peut aussi s'écrire :

$$g = \omega_o^2 a \qquad (4)$$

2. Equation différentielle.

Pour déterminer l'équation différentielle du mouvement, on applique le fait que le point *M* de masse *m* est uniquement soumis à des forces conservatives : son poids, la tension du ressort et à la réaction du support.

L'énergie de ce point se conserve donc au cours de son mouvement.



$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad E_m = E_c + E_{p_p} + E_{p_e}$$

- E_{p_p} énergie potentielle de pesanteur :

  $$E_{p_p} = -mgz_m = -mga\sin\theta$$

avec l'axe *Oz* orienté verticalement vers le bas et la référence de l'énergie potentielle de pesanteur prise en *O*.

- E_{p_e} énergie potentielle élastique :

  $E_{p_e} = \frac{1}{2}k\left(l - l_o\right)^2$ avec la référence prise lorsque le ressort est à vide.

On exprime l'allongement $\left(l - l_o\right)$ en fonction de l'angle θ :

$$\left(l - l_o\right) = 2a\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{d'où :}$$

$$E_{p_e} = 2a^2k\sin^2\frac{\theta}{2}$$

- E_c énergie cinétique :

  $$E_c = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

On exprime la dérivée temporelle de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = -mga\dot{\theta}\cos\theta + 2ka^2 2\frac{\dot{\theta}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}ma^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \text{ pour } \dot{\theta} \neq 0 :$$

$$-mga\cos\theta + ka^2\sin\theta + ma^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\sin\theta - \frac{g}{a}\cos\theta = 0 \qquad \text{or } \frac{k}{m} = \frac{g}{a} = \omega_o^2$$

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\left(\sin\theta - \cos\theta\right) = 0 \qquad (5)$$

A l'équilibre $\ddot{\theta} = 0$ et $\theta = \alpha$ d'où :

$$\sin\alpha = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Soit $\theta = \alpha + \varepsilon$ avec $\varepsilon << 1$. L'équation différentielle (5) s'écrit alors :

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\left(\sin\left(\alpha+\varepsilon\right) - \cos\left(\alpha+\varepsilon\right)\right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\left(\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\cos\alpha - \cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\alpha\sin\varepsilon\right) = 0$$

Or $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ et $\cos\varepsilon \approx 1$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_o^2\left(\sin\alpha + \varepsilon\cos\alpha - \cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha\right) = 0 \quad \text{or } \sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\ddot{\varepsilon} + 2\omega_o^2\sin\alpha\varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_o^2\sqrt{2}\varepsilon = 0$$

Autour de la position d'équilibre $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la masse m oscille à la pulsation $\omega = \sqrt{\sqrt{2}}\omega_o$. La position d'équilibre étudiée est donc stable.