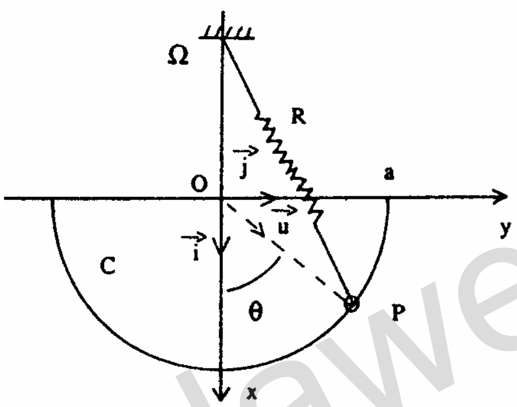
M3.7. Etude d'un système masse-ressort.

On se place dans le référentiel galiléen $\Re$ de repère *(Oxyz)* orthonormé, direct, de vecteurs unitaires de base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Le dispositif envisagé est constitué d'un ressort *R*, d'un demi-cercle *C* et d'une perle *P*.

Le ressort *R* est parfait, c'est-à-dire sans masse et développant selon sa propre direction une force proportionnelle à son élongation. On note *K* ce coefficient de proportionnalité et *l* la longueur à vide de *R*. Le demi-cercle *C* (fixe dans $\Re$), de rayon *a*, de centre *O*, est contenu dans le demi-plan *xOy*, $x > 0$, supposé vertical, *Ox* étant la verticale descendante.

La perle *P* est un objet quasi-ponctuel de masse *M* astreint à se déplacer sans frottement sur *C*. Le ressort *R* a une extrémité liée à *P* et l'autre à un point Ω situé aux coordonnées $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$.

La position de *P* dans $\Re$ est repérée par l'angle $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OP}\right)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire de OP, $\vec{v}$ le vecteur unitaire déduit de $\vec{v}$ par la rotation de $+\pi/2$ autour de $\vec{k}$. Le système est placé dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = g\vec{i}$ de valeur g constante.



Les expressions vectorielles demandées (questions 1, 3, 4 et 5) seront exprimées dans la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{P\Omega}$ en fonction de *a* et θ.
2. Donner l'expression du module $P\Omega$ de $\overrightarrow{P\Omega}$ en fonction de *a* et θ (ou mieux, de $\theta/2$).
3. Donner l'expression du vecteur tension $\vec{T}$ du ressort en fonction de *a, K, l* et θ (ou mieux, de $\theta/2$).
4. Soit $\vec{F}$ la résultante des forces extérieures appliquées à la nasse *M*. On note *N* le module de la réaction de *C* sur *P*. Donner l'expression des composantes de $\vec{F}$ en fonction de *a, g, K, l, M, N* et θ.
5. En déduire, en fonction des mêmes paramètres à l'exception de $\dot{\theta}$ l'expression de l'énergie potentielle *Ep* dont dérive la force $\vec{F}$.
6. Déterminer l'expression des positions d'équilibre $\theta = \theta_i$, envisageables pour le système.
7. On veut imposer l'existence d'une position d'équilibre pour une valeur $\theta_i \neq 0$ comprise entre 0 et $\pi/2$ (ce qui implique par symétrie une position équivalente θ_i comprise entre 0 et $-\pi/2$).
   Ecrire les inégalités que cela implique sur les paramètres du problème.
   Donner une interprétation physique de ces conditions.
8. Les conditions ci-dessus étant réalisées, déterminer la stabilité des équilibres ainsi obtenus.